Diskret matematik D ht 2005: Veckoblad läsvecka 6

1. Hur många ”ord” kan bilda av bokstäverna i MATEMATIKERSAMFUNDET?

2. Grafen $K_{m,2}$ har 72 kanter. Vad är m?

3. Hur många permutationer $a(1), a(2), \ldots, a(n)$ av talen $1, 2, \ldots, n$ finns det som har två stigande följder, dvs är sådana att det finns ett heltal $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ sådant att $a(k) > a(k+1)$, $a(1) < a(2) < \ldots < a(k)$ och $a(k+1) < a(k+2) < \ldots < a(n)$?

4. Låt $G = (V, E)$ vara en graf med 8 noder sådan att alla noder har gradtal 4. Visa att G är sammanhängande och att G innehåller en s.k. Hamiltonväg, dvs en väg som passerar genom varje nod precis en gång.

Lösningar

1. Om man betraktar alla bokstäver som om de vore olika skulle antalet ”ord” bli $20!$. Nu finns det ju exempelvis 3 stycken M och om man betraktar alla bokstäver som om de vore olika så räknar man ju ord där man endast omordnat M’en inbördes som olika, trots att det ju egentligen rör sig om samma ord. För att kompensera för detta måste man alltså dividera med antalet inbördes omordningar av M’en, dvs $3!$ stycken. Nu finns det ju fler bokstäver som förekommer mer än en gång; A (3 st), E (3 st) och T (3 st), så för att kompensera även för detta får man dividera med $3!$ tre gånger till. Svaret blir alltså att det finns $20!/(3!)^4$, dvs $20!/6^4$ olika ”ord”.

2. I grafen $K_{m,n}$ är var och en av m vänsternoder förbunden med en kant med var och en av n högernoder. Enligt multiplikationsprincipen finns det alltså mn kanter i grafen. I vårt fall är $n = 2$ och vi får att $2m = 72$, dvs $m = 36$.

3. Låt x_k vara antalet permutationer med två stigande följder sådana att $a(k) > a(k+1)$, dvs där ”fallet” sker mellan position k och position $k+1$. Låt x vara det totala antalet permutationer med två stigande följder. Eftersom två permutationer med två stigande följder med fallet på olika ställen måste vara olika, gäller att

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} x_k.$$

Nu är ju x_k samma som antalet sätt att välja ut k stycken element till att stå till vänster om fallet, minus ett (eftersom man om man väljer just elementen $1, 2, 3, \ldots, k$ inte får något fall), så

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} (\binom{n}{k} - 1) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} - n + 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - n - 1 = 2^n - n - 1.$$

4. Grafen är sammanhängande för att om så inte vore fallet så skulle den ha minst två komponenter och den minsta av dessa skulle innehålla högst fyra noder. Detta är oförenligt med uppgiften att alla noder har fyra grannar.

   Av samma skäl måste grafen innehålla en enkel väg av längd 5: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Låt u vara en de övriga tre noderna. Om det inte finns en väg av längd 6 är u inte granne med v_1 eller v_5 och därmed granne med minst två av v_2, v_3 och v_4. Dessa grannar måste vara v_2 och v_4 ty annars finns det en väg av längd 6 via u. Samma resonemang fungerar för de övriga två kvarvarande noderna. Men detta betyder att v_2 och v_4 har fem grannar, en motsägelse. Det finns alltså en väg av längd 6: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$.

   Om det nu inte finns någon väg av längd 7 gäller för u, en av de två kvarvarande noderna att u inte är granne med v_1 eller v_6 och därmed med minst tre av v_2, v_3, v_4, v_5 och därmed garanterat två i rad av dessa. Detta bildar en väg av längd 7 via u.

   Det finns alltså en väg av längd 7; $v_1, \ldots, v_7$. Låt u vara den återstående noden. Om det inte finns en väg av längd 8 är u granne med fyra av noderna $v_2, \ldots, v_7$ och därmed två i rad av dem. Detta bildar en väg av längd 8 via u, en motsägelse.

   Det finns alltså en väg av längd 8, dvs en Hamiltonbana.