Diskret matematik D ht 2005: Veckoblad läsvecka 1

1. Vilka av följande logiska formler är tautologier?

   (a) $\neg(P \wedge \neg P)$,

   (b) $P \to \neg P$,

   (c) $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$.

2. Låt ”universum” vara mängden av alla katter och låt

   $P(x)$: x har morrhår.

   Skriv följande utsagor på symbolisk logisk form:

   (a) Alla katter har morrhår.

   (b) Det finns katter utan morrhår.

   (c) Ingen katt har morrhår.

3. Avgör vilka av följande logiska argument som är giltiga:

   (a) $$\frac{\begin{array}{r}\text{Alla advokater är rika}\\ \text{Alla rika människor tycker om ostron}\end{array}}{\text{Alla advokater tycker om ostron}}$$

   (b) $$\frac{\begin{array}{r}\text{Alla kvinnor tycker om vin}\\ \text{Somliga lärare är kvinnor}\end{array}}{\text{Somliga lärare tycker om vin}}$$

   (c) $$\frac{\begin{array}{r}\text{Somliga bilar är gula}\\ \text{Somliga bilar är en Volvo}\end{array}}{\text{Somliga Volvo är gula}}$$

   (d) $$\frac{\begin{array}{r}\text{Alla elefanter är stora}\\ \text{Somliga däggdjur är stora}\end{array}}{\text{Somliga däggdjur är elefanter}}$$

4. Låt $f : A \to B$ vara en funktion. För en delmängd C av A skriv f_C för *restriktionen* av f till C, dvs den funktion $f_C : C \to B$ som ges av

   $$f_C(x) = f(x),\ x \in C.$$

   Antag nu att $A = A_1 \cup A_2$ Är följande påståenden sanna?

   (a) Om f_{A_1} och f_{A_2} är surjektiva så är f surjektiv.

   (b) Om f_{A_1} och f_{A_2} är injektiva så är f injektiv.

Lösningar

1. (a) är en tautologi ty vilket sanningsvärde P än har blir $P \wedge \neg P$ falsk och hela uttrycket således sant. Del (b) är ingen tautologi ty om P är sann är $\neg P$ falsk och hela uttrycket därmed falskt. Del (c) är en tautologi. Detta kan verifieras med en sanningstabell. Alternativt observerar man att (c) är ekvivalent med $\neg(P \wedge (\neg P \vee Q)) \vee Q$ som är ekvivalent med $\neg P \vee (P \wedge \neg Q) \vee Q$ som uppenbarligen är sann oavsett sanningsvärdena på P och Q.

2. (a) $\forall x : P(x)$,

   (b) $\exists x : \neg P(x)$,

   (c) $\neg \exists x : P(x)$.

3. Argument (a) är giltigt, ty för en godtycklig advokat a gäller enligt första hypotesen att a är rik så enligt hypotes 2 tycker a om ostron.

   Argument (b) är också giltigt, ty enligt den andra hypotesen finns det en person p som är både lärare och kvinna. Eftersom p är kvinna tycker hon enligt den första hypotesen om vin. Därmed är p en lärare som tycker om vin, vilket bekräftar slutsatsen.

   Del (c) är ogiltigt, ty i en värld där inga Volvobilar är gula, men där det finns gula bilar av andra märken, är båda hypoteserna sanna och slutsatsen falsk.

   Del (d) är också ogiltigt, ty även om inte elefanter klassas som däggdjur kan man tänka sig att man klassificerar andra stora djur som däggdjur (t.ex. valar).

4. Utsagan (a) är sann, ty om f_{A_1} är surjektiv gäller att

$$f(A) \supseteq f(A_1) = f_{A_1}(A_1) = B.$$

   Däremot är inte (b) sann, låt till exempel $A = \mathbb{R}$, $A_1 = (-\infty, 0]$, $A_2 = [0, \infty)$ och $f(x) = x^2$.