Diskret matematik D ht 2005: Veckoblad läsvecka 3

1. De s.k. harmoniska talen $H_1, H_2, H_3, \ldots$ ges av

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Visa att det för alla positiva heltal n gäller att

$$\sum_{j=1}^{n} H_j = (n+1)H_n - n.$$

(När n är stort gäller att $H_n \approx \ln n$; mer precist gäller att $H_n - 1 < \ln n < H_{n-1}$. Denna observation är ofta till stor nytta när man vill förstå hur arbetskrävande vissa stora datoralgoritmer är.)

2. En algoritm som ofta används för att sortera listor i (t.ex. alfabetisk) ordning är den s.k. Quicksort-algoritmen, som tar en osorterad lista L och matar ut den sorterade listan $QS(L)$. Algoritmen definieras rekursivt på följande sätt:

   - Om L är tom eller innehåller endast ett element lämnas L oförändrad, dvs $QS(L) = L$.
   - Om L innehåller minst två element väljs en godtycklig post x och denna jämförs med alla andra poster, varvid dessa samlas i två grupper, A av poster som ska komma före x och B av poster som ska komma efter x. På de kortare listorna A och B tillämpas sedan QS. Med andra ord: $QS(L) = QS(A)\, x\, QS(B)$.

   Använd induktion till att visa att algoritmen fungerar. (Fundera gärna över hur många jämförelser som man kan förvänta sig totalt behöver göras om x alltid väljs på måfå. De harmoniska talen kommer in här.)

3. Ett lyckohjul har 36 positioner. Lille Axel har fått i uppdrag att placera ut talen 1 till 36 på varsin position på ett sådant sätt att det ingenstans finns tre tal i rad som summerar sig till minst 55. Axel prövar, funderar och sliter sitt hår om vartannat, men ingenting tycks fungera. Hjälp den stackars Axel att slippa ifrån sitt hopplösa arbete genom att bevisa att uppdraget faktiskt är omöjligt.

   Tips: Kalla talen som placeras ut på positionerna $1, 2, \ldots, 36$ för $x_1, x_2, \ldots$ respektive x_{36} och låt $s_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $s_2 = x_2 + x_3 + x_4$,...,$s_{36} = x_{36} + x_1 + x_2$. Visa att summan av s_i:na är större än vad den skulle kunna vara om Axels uppdrag vore möjligt. (När man löser denna uppgift använder man, förmodligen utan att tänka så mycket på det, det självklara faktum att i en mängd av reella tal finns alltid ett tal som är minst lika stort som medelvärdet av alla talen i mängden. Detta faktum är känt som en variant av *Dirichlets lådprincip*.)

4. Finn två heltal u och v så att $127u + 201v = 1$.

Lösningar

1. Använd induktion: Eftersom $H_1 = 1$ gäller påståendet i uppgiften då $n = 1$. Fixera nu ett heltal $k \geq 2$ och antag att $\sum_{j-1}^{k-1} H_j = kH_{k-1} - (k-1)$. Om vi kan visa att det då måste gälla att

$$\sum_{j=1}^{k} H_j = (k+1)H_k - k$$

följer det önskade resultatet av induktionsprincipen. Men

$$\sum_{j=1}^{k} H_j = H_k + \sum_{j=1}^{k-1} H_j = H_k + kH_{k-1} - (k-1)$$

$$= H_k + k(H_k - \frac{1}{k}) - k + 1 = (k+1)H_k - k$$

som önskat.

2. En lista med 0 eller 1 poster sorteras korrekt enligt den första punkten i specifikationen av algoritmen. Fixera nu n och antag att listor med 2,3,4,... eller $n-1$ poster sorteras korrekt och betrakta vad som då händer med en lista med n poster. Eftersom de båda dellistorna A och B har högst $n-1$ poster kommer bägge att sorteras korrekt. Enligt punkt 2 i specifikationen kommer hela listan att sorteras till $QS(A)xQS(B)$ och blir således också korrekt sorterad. Det följer nu av induktionsprincipen att algoritmen fungerar.

3. Summan av s_i:na blir $3\sum_{k=1}^{36} k = 3 \cdot 36 \cdot 37/2 = 1998$. Men om man skulle kunna placera ut talen så som Axel fått i uppdrag att göra blir summan av s_i:na högst $54 \cdot 36 = 1944$, en motsägelse.

4. Använd Euklides utökade algoritm.