Inledande diskret matematik D, HT2014
Extra material i kombinatorik (Kapitel 6)

1. Bollar i lådor

Sats. *Antalet sätt att placera k identiska bollar i n åtskiljbara lådor är* $\binom{n+k-1}{k}$.

BEVIS: Eftersom bollarna är identiska, det enda som är viktigt är hur många bollar som hamnar i varje låda. Eftersom lådorna är åtskiljbara kan vi föreställa oss att de är numrerade, säg $1, 2, \ldots, n$. Låt x_i vara antalet bollar som hamnar i låda i. Då söker vi antalet lösningar till ekvationen

$$x_1 + \cdots + x_n = k, \qquad x_i \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Jag hävdar nu att det finns en naturlig 1-1 korrespondens mellan lösningarna till (1) och uppsättningar av k prickor och $n-1$ vertikala streck. För vi kan tolka x_1 som antalet prickor innan 1:a streck, x_2 som antalet prickor mellan 1:a och 2:a strecken osv fram till x_n som antalet prickor efter sista strecket. Men antalet uppsättningar av prickor och streck är uppenbarligen $\binom{n+k-1}{k}$ för det gäller att välja i vilka k av de totalt $k+(n-1)$ positionerna som man ska placera prickorna.

2. Sållprincipen

Kom ihåg binomialsatsen (Sats 6.14):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{2}$$

Om vi sätter $x = -1$ och $y = 1$ så får vi att

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}. \tag{3}$$

Notera att detta kan skrivas om till

$$\sum_{k \text{ jämn}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ udda}} \binom{n}{k}, \tag{4}$$

som säger just att antalet delmängder till $\{1, 2, \ldots, n\}$ med ett jämnt antal element är lika med antalet delmängder med ett udda antal element, något som vi har redan sett i Kryssuppgift 2.B.2. Ekv. (3) leder oss också till den allmänna formuleringen av sållprincipen:

Sats. *Låt $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n$ vara ändliga delmängder till något universum U. Då gäller att*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left(\sum_{i=1}^{n} |A_i|\right) - \left(\sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j|\right) + \tag{5}$$

$$+\left(\sum_{i\neq j\neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k|\right) - \ \ldots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

BEVIS: Låt x vara ett godyckligt element av unionen. Vi måste bevisa att x räknas exakt en gång i HL av (5). Säg att x tillhör m av de n mängderna och, WLOG, att det är mängderna $A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_m$ som den tillhör. Då gäller att

(i) x räknas $m = \binom{m}{1}$ gånger i första summan i HL, nämligen en gång för varje A_i som den tillhör,
(ii) x räknas bort $\binom{m}{2}$ gånger i den andra summan, nämligen en gång för varje par $\{i,\, j\}$ så att den tillhör både A_i och A_j,
(iii) x räknas $\binom{m}{3}$ gånger i den tredje summan,
(iv) osv, tills att den räknas $(-1)^{m+1}\binom{m}{m} = (-1)^{m+1}$ gånger i termen $(-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|$.

Så antalet gånger som x räknas i HL är $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\binom{m}{k}$. Från (3) ser vi att denna alternerande summa av binomialkoefficienter hade varit noll om inte för att termen $(-1)^1\binom{m}{0}$ saknas i början. Således är summan lika med $\binom{m}{0} = 1$, dvs x räknas totalt en gång, v.s.v.

Exempel. *Bestäm antalet surjektiva funktioner från $\mathbb{Z}_7$ till $\mathbb{Z}_4$.*

LÖSNING: För att underlätta med notation, beteckna $\mathbb{Z}_7 := \{0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}$ och $\mathbb{Z}_4 := \{0,\, 1,\, 2,\, 3\}$. Låt universumet U bestå av alla funktioner från $\mathbb{Z}_7$ till $\mathbb{Z}_4$, så $|U| = 4^7$. Vi definierar fyra delmängder till U enligt

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f \in U : 0 \notin V_f\}, \\ A_2 &= \{f \in U : 1 \notin V_f\}, \\ A_3 &= \{f \in U : 2 \notin V_f\}, \\ A_4 &= \{f \in U : 3 \notin V_f\}. \end{aligned}$$

Per definition så består unionen $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ av alla icke-surjektiva funktioner i U. Vi vill alltså räkna bort dessa, så svaret på uppgiften kommer att bli

$$4^7 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|. \tag{6}$$

Vi tillämpar sållprincipen för att beräkna storleken av unionen. Först betrakta något A_i, det spelar ingen roll vilken så säg A_1. Eftersom noll tillhör ej värdemängden så innebär det att vi har tre val i stället för fyra för vart varje element i $\mathbb{Z}_7$ ska skickas. Således är $|A_1| = 3^7$. Densamma gäller för de övriga A_i:en så första summan i HL av (5) blir $4 \cdot 3^7$.

Näst betraktar vi ett snitt mellan två av A_i:en. Igen spelar det ingen roll vilka två, så låt oss ta $A_1 \cap A_2$. Per definition så består denna mängd av de funktioner som missar både 0 och 1. M.a.o. det finns nu bara två val för vart varje element i $\mathbb{Z}_7$ ska skickas, så $|A_1 \cap A_2| = 2^7$. Det finns $\binom{4}{2} = 6$ parvisa snitt så den andra summan i HL av (5) blir $6 \cdot 2^7$.

Med liknande resonemang ser vi att den tredje summan i HL av (5) blir $\binom{4}{3} \cdot 1^7 = 4$. Då tar det stopp ty $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \phi$, för en fumktion kan inte missa allt i målmängden.

Insättning av allt in i (5) och sedan (6) ger att antalet surjektiva funktioner är

$$4^7 - \left(4 \cdot 3^7 - 6 \cdot 2^7 + 4\right) = \cdots = 8400.$$

3. Multinomialsatsen

Det är naturligt att fråga om vi kan utvidga binomialsatsen till fler än två variabler. Svaret är ja, men det är lite krångligt att skriva ner. Vi nöjer oss med ett exempel som visar hur det funkar med tre variabler och hoppas att det allmäna mönstret blir klart. Se också demouppgift 6.X.3 för ett exempel med fyra variabler.

Exempel. *Bestäm koefficienten för $x^6y^7z^4$ i utvecklingen av $(x+y+z)^{17}$.*

Att ‘”utveckla” $(x+y+z)^{17}$ betyder att man ställer upp

$$(x+y+z)\,(x+y+z)\,\ldots\,(x+y+z) \qquad \text{17 gånger}$$

och plockar ut antingen x, y eller z från varje parentes. Det finns totalt 3^{17} sätt att plocka, alltsa kommer hela utvecklingen att bestå, innan vi samlar termer av samma art, av totalt 3^{17} termer. Frågan är hur många av dessa termer som kommer att bli $x^6y^7z^4$. För att få en sådan term måste vi plocka x ur 6 parenteser, y ur 7 st och sedan z ur 4 st. Antalet sätt att göra detta är $\binom{17}{6} \times \binom{11}{7} \times \binom{4}{4} = \frac{17!}{6!\,7!\,4!}$. Så detta blir koefficienten av $x^6y^7z^4$.