Lösningar Inledande diskret matematik
5/1 -15

1)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ p \to r \end{array}$$

sök motex

$p \to r : F \Rightarrow p : S,\ r : F$

$p \to q : S \Rightarrow q : S$

då blir $q \to r : F$

motex saknas <u>tautologi</u>

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{r \to q} \\ p \to r \end{array}$$

sök motex.

$p \to r : F \Rightarrow p : S,\ r : F$

$p \to q : S \Rightarrow q : S$

motex. <u>inte tautologi</u>

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \to r} \\ p \to (q \wedge r) \end{array}$$

sök motex.

$p \to (q \wedge r) : F \Rightarrow p : S$

q eller $r : F$

$q : F$ gör rad 1 : F

$r : F$ —"— 2 : F

motex saknas <u>tautologi</u>

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \to r} \\ q \vee r \end{array}$$

sök motex

$q \vee r : F \Rightarrow q : F,\ r : F$

$p : F$ ger motex.

<u>inte tautologi</u>

2) $2^{13} = (2^4)^3 \cdot 2 = 16^3 \cdot 2 \equiv 5^3 \cdot 2 = 25 \cdot 10 \equiv 3 \cdot 10 =$

$= 30 \equiv 8$

eller $2^{13} \equiv 2^{\varphi(11)} 2^3 \equiv 8$

$3^{17} = (3^3)^5 \cdot 9 = (27)^5 \cdot 9 \equiv 5^5 \cdot 9 = 25^2 \cdot 5 \cdot 9 \equiv$

$\equiv 3^2 \cdot 5 \cdot 9 = 81 \cdot 5 \equiv 4 \cdot 5 = 20 \equiv 9$

eller $3^{17} = 3^{10} \cdot 3^7 \equiv 3^7 = (3^3)^2 \cdot 3 = 27^2 \cdot 3 =$

$= 5^2 \cdot 3 = 25 \cdot 3 \equiv 3 \cdot 3 = 9$

och $8 + 9 = 17 \equiv 6$

3) $34x + 26y = 12$

$17x + 13y = 6$

Euklides alg.

$17 = 13 + 4$

$13 = 3 \cdot 4 + 1$

Bezouts id

$1 = 13 - 3 \cdot 4 = 13 - 3(17 - 13) = 4 \cdot 13 - 3 \cdot 17$

$6 = 24 \cdot 13 - 18 \cdot 17 = 24 \cdot 13 - 18 \cdot 17 + n \cdot 13 \cdot 17 -$

$- n \cdot 13 \cdot 17$

Svar: $\begin{cases} x = -18 + 13n \\ y = 24 - 17n \end{cases}$ $\begin{cases} x = 8 + 13n \\ y = -10 - 17n \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \equiv 7 \bmod 17 \\ y \equiv 2 \bmod 13 \end{cases}$

Bezouts id (se uppgift 3) $1 = 4\cdot 13 - 3\cdot 17$

$x = 4\cdot 7\cdot 13 - 3\cdot 2\cdot 17 + n\cdot 13\cdot 17$

$= 262 + n\,221$

Svar: $x = 41 + n\cdot 221$

5) $fRg \Leftrightarrow \exists x : f(x) = g(x)$

f reflexiv: fRf ty $\exists x$ (alla x duger) $f(x) = g(x)$

f symmetrisk: $fRg \Leftrightarrow \exists x_0 : f(x_0) = g(x_0)$

$\Leftrightarrow g(x_0) = f(x_0) \Rightarrow \exists x \,(= x_0) :$

$g(x) = f(x)$

f ej transitiv: Ta $f(x) = x$, $g(x) = 1 - x$

$h(x) = x + \frac{1}{2}$

då har vi fRg ty $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = g(\frac{1}{2})$

gRh ty $g(\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} = h(\frac{1}{4})$

men $f \not R h$ ty $x \neq x + \frac{1}{2} \quad \forall x$

6) Välj först ut de 3 som skall gå tillsammans

$13 \cdot 12 \cdot 11$ val

Sedan kan vi sätta samman täget med 11 blå och 11 gröna grupper och välja om den första skall vara blå eller grön

Svar: $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 11! \cdot 11! \cdot 2 \approx 5{,}4684 \cdot 10^{18}$

7) $f: A \to B$ är surjektiv $|A| = 9$, $|B| = 8$

medför att två element ur A avbildas på ett i B, alla andra går 1 på 1

Om $f(P) \cap f(Q) \neq \emptyset$ måste de båda elementen som går på ett ligga i varsin P eller Q och $f(P) \cap f(Q)$ är den gemensamma bilden

Detta är nödvändigt. De återstående 7 elementen i A kan höra antingen till P eller Q så problemet är att välja en delmängd (P) av A och resten går till Q

Svar: $2^7 \cdot 2 = 2^8$

(två val för de nödvändiga två, P eller Q)

7) Om de från början har a, b resp c äpplen får vi följande utveckling

A	B	C
a	b	c
$a-b-c$	$2b$	$2c$
$2(a-b-c)$	$2b-(a-b-c)-2c = 3b-a-c$	$4c$
$4(a-b-c)$	$2(3b-a-c)$	$4c-2(a-b-c)-(3b-a-c) = 7c-a-b$

och ekvationerna

$$\begin{cases} 4(a-b-c) = 2(3b-a-c) \\ 7c-a-b = 2(3b-a-c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6a-10b-2c = 0 \\ a-7b+9c = 0 \end{cases}$$

$$3a-5b-\cancel{1}c = 0$$

$$3a-21b+27c = 0$$

$$16b-28c = 0$$

$$4b = 7c$$

$$b = \frac{7}{4}c$$

$a = 7b-9c = \frac{49}{4}c - \frac{36}{4}c = \frac{13}{4}c$

enda sättet att få heltalslösningar är att $4 / c$

Svar: $\begin{cases} a = 13n \\ b = 7n \\ c = 4n \end{cases}$