

Inledande diskret matematik D, HT2014

Lösningar till tentan 2015-01-05

1. En logisk formel säga vara en *tautologi* om den är sann oavsett sanningsvärdena på de ingående Booleska variablerna. Här har vi tre variabler p , q , r så det finns totalt 8 möjliga kombinationer av sanningsvärden. Det är lite opraktiskt att testa alla möjligheter i varje deluppgift (totalt 32 fall), så vi försöker förenkla arbetet först. Alla fyra formlerna är implikationer, och en implikation är alltid sann då hypotesen är falsk. Så det enda intressanta fallet är då hypotesen är sann. Formeln är alltså en tautologi om och endast om slutsatsen är sann när som helst hypotesen är det eller, ekvivalent, om hypotesen är falsk när som helst slutsatsen är det. Sett omvänt, för att bevisa att en av formlerna inte är en tautologi så räcker det att hitta en instans då slutsatsen är falsk trots att hypotesen är sann.
 - (a) En tautologi. Om p implicerar q och q implicerar r så måste p implicera r .
 - (b) Ej en tautologi. Om p och q är sanna medan att r är falsk så är hypoteserna sanna men slutsatsen falsk.
 - (c) En tautologi. Om p implicerar q och p implicerar r så implicerar p både q och r , dvs p implicerar $q \wedge r$.
 - (d) Ej en tautologi. Om p , q , r är alla falska så är hypoteserna sanna men slutsatsen falsk.
2. 11 är ett primtal så enligt Fermats sats gäller att $a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ för alla heltal a som inte är delbara med 11. Varken 2 eller 3 är delbara med 11 så detta innebär att, modulo 11,

$$\begin{aligned} 2^{13} &= 2^{10} \cdot 2^3 \equiv 1 \cdot 2^3 \equiv 8, \\ 3^{17} &= 3^{10} \cdot 3^7 \equiv 3^7 = (3^2)^3 \cdot 3 \equiv (-2)^3 \cdot 3 \equiv -24 \equiv -2. \end{aligned}$$

$$\text{Så } 2^{13} + 3^{17} \equiv 8 - 2 \equiv 6 \pmod{11}.$$

3. Vi kan dela igenom med 2 utan att ändra ekvationen och i stället lösa $17x + 13y = 6$. Vi vet att det kommer att finnas lösningar ty $\text{SGD}(17, 13) = 1$. Kör Euklides först framåt:

$$\begin{aligned} 17 &= 1 \cdot 13 + 4, \\ 13 &= 3 \cdot 4 + 1. \end{aligned}$$

Euklides bakåt ger sedan

$$1 = 13 - 3 \cdot 4 = 13 - 3(17 - 13) = (-3) \cdot 17 + 4 \cdot 13.$$

Multipluera igenom med 6 så får vi

$$6 = (-18) \cdot 17 + 24 \cdot 13,$$

så en lösning till vår Diof. ekv. är $x_0 = -18$, $y_0 = 24$. Den allmänna lösningen ges av

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)n, \quad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Här är $a = 17$, $b = 13$, $d = 1$ så den allmänna lösningen blir

$$x = -18 + 13n, \quad y = 24 - 17n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Kinesiska Restsatsen säger att den allmänna lösningen är

$$x \equiv 7(13r) + 2(17s) \pmod{17 \cdot 13}, \quad (1)$$

där $13r \equiv 1 \pmod{17}$ och $17s \equiv 1 \pmod{13}$. Både r och s hittas via Euklides algoritm. Vi har redan kört Euklides på paret $(17, 13)$ i förra uppgiften och fått att

$$1 = (-3) \cdot 17 + 4 \cdot 13.$$

Modulo 17 säger detta att $1 \equiv 4 \cdot 13$ så vi kan ta $r = 4$. Modulo 13 säger den att $1 \equiv -3 \cdot 17$ så vi kan ta $s = -3$ eller, om man vill ha ett positivt värde, tag $s = -3 + 13 = 10$. Insättning in i (1) ger lösningen

$$x \equiv 91 \cdot 4 + 34 \cdot 10 \equiv 704 \equiv 41 \pmod{221}.$$

SVAR: $x \equiv 41 \pmod{221}$.

5. *Reflexiv*: $f\mathcal{R}f$ för $f(x) = f(x)$ gäller för vilken som helst x i definitionsmängden.

Symmetrisk: Om $f\mathcal{R}g$ så finns det ett x_0 sådant att $f(x_0) = g(x_0)$. Men då är ju $g(x_0) = f(x_0)$ också, så $g\mathcal{R}f$.

Ej transitiv: Det räcker att hitta ett motexempel. Tag t.ex. $f(x) = 0$, $g(x) = x$ och $h(x) = 1$, så f och h är konstanta funktioner och g är linjär. Vi har $f\mathcal{R}g$ ty $f(0) = g(0) = 0$, och $g\mathcal{R}h$ ty $g(1) = h(1) = 1$. Men $(f, h) \notin \mathcal{R}$ ty $f(x) = 0 \neq 1 = h(x)$ för alla $x \in [0, 1]$.

6. Efter att man har placerat ut 3 gröna i rad någonstans så är det bestämt hur resten av vagnarna ska sättas ihop för man måste annars alternera mellan blå och grön. Dessa tre kan placeras i positioner $(1, 2, 3)$ eller $(2, 3, 4)$ eller ... osv fram till $(22, 23, 24)$. Så det finns 22 möjligheter här. Sedan återstår det $13!$ möjligheter för hur de gröna vagnarna ska ordnas inbördes, resp. $11!$ möjligheter för de röda. Enligt multiplikation har vi totalt $13! \times 11! \times 22$ möjligheter för att sätta ihop vagnarna.

7. Eftersom $|A| = 9$ och $|B| = 8$ och f är surjektiv, så finns det två element i A , låt oss döpa dem till a_1 och a_2 , som avbildas på samma element i B medan att f är i övrigt injektiv. Kravet på partitionen (P, Q) är alltså att a_1 och a_2 hamnar i olika delar av partitionen. Det återstår 7 element av A att placera ut och de kan placeras i antingen P eller Q . Det finns alltså 2 val per element och således $2^7 = 128$ val totalt. Detta blir antalet möjliga partitioner.
8. Kalla för a, b, c antalet äpplen som A, B resp. C har från början, och låt oss gå igenom hur dessa antal ändras steg för steg.

STEG 1: A ger b äpplen till B och c äpplen till C . Så efter Steg 1 har de följande antal äpplen:

$$A : a - b - c, \quad B : 2b, \quad C : 2c.$$

STEG 2: B ger $a - b - c$ äpplen till A och $2c$ äpplen till C . Så efter Steg 2 har de följande antal äpplen:

$$A : 2(a - b - c), \quad B : 2b - [(a - b - c) + 2c] = 3b - a - c, \quad C : 4c.$$

STEG 3: C ger $2(a - b - c)$ äpplen till A och $3b - a - c$ äpplen till B . Så efter Steg 3 har de följande antal äpplen:

$$A : 4(a - b - c), \quad B : 2(3b - a - c), \\ C : 4c - [2(a - b - c) + (3b - a - c)] = 7c - a - b.$$

De ska nu ha samma antal äpplen allihopa så

$$4(a - b - c) = 2(3b - a - c) = 7c - a - b.$$

Från den första likheten härleder vi att $c = 3a - 5b$. Insättning i den andra likheten ger

$$2[3b - a - (3a - 5b)] = 7(3a - 5b) - a - c \Rightarrow \dots \\ \dots \Rightarrow b = \frac{7}{13}a \Rightarrow c = 3a - 5\left(\frac{7}{13}\right)a = \frac{4}{13}a.$$

Här är a en fri variabel, som är rimligt eftersom det är klart att samma process skulle leda till att de slutar med lika många äpplen om man hade skalat om antalet äpplen från början. Det enda kravet är att a, b, c måste vara icke-negativa heltal, och därför måste a vara en multipel av 13, så $a = 13n$ för något $n \in \mathbb{N}$. Så den allmänna lösningen är

$$a = 13n, \quad b = 7n, \quad c = 4n, \quad n \in \mathbb{N}.$$