Tentamen
TMV210/MMGD10 Inledande Diskret Matematik, D1/GU

2016-01-05 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Johannes Borgqvist, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 22 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2015. Preliminärt så krävs 32 poäng för betyget 4 och 42 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 27 januari. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. I uppgift 5 behöver man inte räkna ut svaren som decimaltal.

Uppgifterna

1. Vilka av följande argument är giltiga ? (6p)

$$\begin{array}{r} b \to a \\ c \to \neg b \vee \neg a \\ d \to b \\ d \\ \hline \neg c \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} a \to b \\ c \to \neg b \vee \neg a \\ d \to b \\ d \\ \hline \neg c \end{array}$$

2. Låt $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden som definieras rekursivt av

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3} \ \ \forall\, n \geq 3.$$

(a) Beräkna direkt a_4 (dvs utan att använda formeln i (b) nedan). (2p)

(b) Bevisa att $a_n = \frac{1}{4}\left(3^n + (-1)^{n+1}\right)$ för alla $n \geq 0$. (6p)

3. (a) Primtalsfaktorisera 7011 och bestäm $\Phi(7011)$. (3p)

(b) Lös kongruensen $47x \equiv 11 \pmod{155}$. (5p)

Var god vänd!

4. Bestäm det minsta positiva heltalet x som uppfyller (7p)

$$x \equiv 1 \pmod 7, \quad 2x \equiv 1 \pmod 9, \quad 4x \equiv 1 \pmod{11}.$$

5. Familjen Svensson ska dekorera sin julgran. De har 3 lådor med 20 röda, blåa resp. gröna bollar, alltså totalt 60 bollar. Granen har dock bara 14 grenar och bara plats för en boll på varje gren. På hur manga sätt kan de dekorera julgranen om (8p)

(a) varje boll har ett nummer mellan $1 - 20$, så bollar i samma färg är åtskiljbara, men det spelar ingen roll vilken boll som sitter på vilken gren ?

(b) bollarna är numrerade som i (a), men det spelar roll vilken boll som sitter på vilken gren ?

(c) bollarna är inte numrerade så bollar i samma färg är oåtskiljbara och det spelar ingen roll heller vilken boll som sitter på vilken gren ?

(d) bollarna är inte numrerade men grenarna är åtskiljbara ?

(e) det är samma förutsättningar som i (a) men de ska välja totalt 5 röda, 6 blåa och 3 gröna bollar ?

6. (a) Definiera vad som menas med att två grafer $G_1 = (V_1, E_1)$ och $G_2 = (V_2, E_2)$ är *isomorfa*. (2p)

(b) Ange en isomorfi $f : G_1 \to G_2$ för graferna i Figur 1 på nästa sida. (2p)

(c) Har grafen G_1 i Figur 1 en Eulercykel (resp. Eulerväg) ? Om ditt svar är "Ja", ge *ett* explicit exempel av en sådan cykel (resp. väg). Om ditt svar är "Nej", förklara varför. (3p)

7. Låt n vara ett positivt heltal och låt $f : \{0, 1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ vara funktionen som ges av $f(k) = \binom{n}{k}$. (6p)

Bevisa att f antar sitt största värde vid $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/GU, 160105

1. (a) Argumentet är giltigt. Antag att slutsatsen är falsk men hypoteserna sanna. Då är $\neg c$ falsk, så c är sann. Eftersom $c \to \neg b \vee \neg a$ så måste minst en av a och b vara falsk. Men $b \to a$ så om b vore sann så vore också a det. Så b måste vara falsk. Men d är sann och $d \to b$, så vi har en motsägelse.

(b) Argumentet är ogiltigt. T.ex. om a är falsk medan att b, c och d är alla sanna, då kommer alla hypoteserna att vara sanna men slutsatsen blir falsk.

2. (a) Vi beräknar i tur och ordning

$$\begin{aligned} a_3 &= 4a_2 - a_1 - 6a_0 = 4(2) - 1 - 6(0) = 7, \\ a_4 &= 4a_3 - a_2 - 6a_1 = 4(7) - 2 - 6(1) = 20. \end{aligned}$$

(b) Vi för ett starkt induktionsbevis.

Steg 1: Basfallen $n = 0, 1, 2$. Vi kontrollerar i tur och ordning att

$$\begin{aligned} 0 = a_0 &= \frac{1}{4}(3^0 + (-1)^1) = \frac{1}{4}(1-1) = 0, \text{ korrekt,} \\ 1 = a_1 &= \frac{1}{4}(3^1 + (-1)^2) = \frac{1}{4}(3+1) = 1, \text{ korrekt,} \\ 2 = a_2 &= \frac{1}{4}(3^2 + (-1)^3) = \frac{1}{4}(9-1) = 2, \text{ korrekt.} \end{aligned}$$

Steg 2: Antag att $a_n = \frac{1}{4}(3^n + (-1)^{n+1})$ för alla $n \leq p$. Vi vill deducera att $a_{p+1} = \frac{1}{4}(3^{p+1} + (-1)^{p+2})$. Enligt rekursionsformeln och induktionsypotesen har vi att

$$\begin{aligned} a_{p+1} &= 4a_p - a_{p-1} - 6a_{p-2} = \\ &= \frac{1}{4}\left[4(3^p + (-1)^{p+1}) - (3^{p-1} + (-1)^p) - 6(3^{p-2} + (-1)^{p-1})\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[3^{p-2}(4 \cdot 9 - 3 - 6 \cdot 1) + (-1)^{p-1}(4 \cdot 1 - (-1) - 6 \cdot 1)\right] = \\ &= \frac{1}{4}\left[27 \cdot 3^{p-2} - 1 \cdot (-1)^{p-1}\right] = \frac{1}{4}\left[3^3 \cdot 3^{p-2} + (-1)^3 \cdot (-1)^{p-1}\right] = \frac{1}{4}\left(3^{p+1} + (-1)^{p+2}\right), \text{ v.s.v.} \end{aligned}$$

3. (a) Notera att siffersumman är 9 så talet är delbart med 3. Vi delar och får $7011 = 3 \cdot 2337$. Siffersumman i den andra faktorn är 15 så den är delbar med 3 igen. Vi delar och får $7011 = 3^2 \cdot 779$. Det är inte direct klar vilka primtal som delar 779, man måste a priori testa upp till $\sqrt{779}$, som är strax under 28, alltså får man testa primtalen upp till 23. Provning ger till slut att 779 är delbart med 19 och vi erhåller den fullständiga faktoriseringen $7011 = 3^2 \cdot 19 \cdot 41$. Slutligen har vi då att $\Phi(7011) = (3^2 - 3^1)(19-1)(41-1) = 6 \cdot 18 \cdot 40 = 4320$.

(b) Vi kör Euklides algoritm på (155, 47). Först framåt

$$\begin{aligned} 155 &= 3 \cdot 47 + 14, \\ 47 &= 3 \cdot 14 + 5, \\ 14 &= 2 \cdot 5 + 4, \\ 5 &= 4 + 1, \end{aligned}$$

sedan bakåt

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 4 \\ &= 5 - (14 - 2 \cdot 5) \\ &= 3 \cdot 5 - 14 \\ &= 3(47 - 3 \cdot 14) - 14 \\ &= 3 \cdot 47 - 10 \cdot 14 \\ &= 3 \cdot 47 - 10 \cdot (155 - 3 \cdot 47) \\ &= 33 \cdot 47 - 10 \cdot 155. \end{aligned}$$

Om vi läser ekvationen modulo 155 så ser vi att $47^{-1} \equiv 33 \pmod{155}$. Nu tar vi kongruensen $47x \equiv 11 \pmod{155}$ och multiplicerar igenom med 33 för att få $x \equiv 33 \cdot 11 \equiv 363 \equiv 53 \pmod{155}$.

4. Först konstatera att $2^{-1} \equiv 5 \pmod 9$ och $4^{-1} \equiv 3 \pmod{11}$ så systemet av tre kongruenser kan skrivas om som

$$x \equiv 1 \pmod 7, \quad x \equiv 5 \pmod 9, \quad x \equiv 3 \pmod{11}.$$

Den allmänna lösningen är

$$x \equiv 1 \cdot b_1 \cdot 9 \cdot 11 + 5 \cdot b_2 \cdot 7 \cdot 11 + 3 \cdot b_3 \cdot 7 \cdot 9 \pmod{7 \cdot 9 \cdot 11}, \tag{1}$$

där

$$\begin{aligned} 9 \cdot 11 \cdot b_1 \equiv 1 \pmod 7 &\Rightarrow b_1 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow \text{tag } b_1 = 1, \\ 7 \cdot 11 \cdot b_2 \equiv 1 \pmod 9 &\Rightarrow 5b_2 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow \text{tag } b_2 = 2, \\ 7 \cdot 9 \cdot b_3 \equiv 1 \pmod{11} &\Rightarrow -3b_3 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow \text{tag } b_3 = -4. \end{aligned}$$

Insättning in i (1) ger

$$\begin{aligned} x \equiv 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 11 + 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 - 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9 \pmod{693} \equiv \\ \equiv 99 + 770 - 756 \equiv 113 \pmod{693}. \end{aligned}$$

Det minsta positiva talet som uppfyller detta är naturligtvis $x = 113$.

5. (a) Alla 60 bollarna är åtskiljbara. Vi ska välja 14 av dem men ordningen i vilken vi gör det är oväsentlig ty grenarna är oåtskiljbara. Således är antalet möjligheter $C(60, 14) = \binom{60}{14} = \frac{60!}{14! \times 46!}$.

(b) Skillnaden från (a) är att det nu spelar roll i vilken ordning bollarna väljs. Således är antalet möjligheter $P(60, 14) = \frac{60!}{46!}$.

(c) Det enda som spelar roll här är hur manga bollar som väljs i varje färg. Låt R, B, G beteckna respektivt antalet röda, blåa och gröna bollar som väljs. Då måste $R + B + G = 14$ gälla så vi söker antalet lösningar till denna ekvation i icke-negativa heltal. Från föreläsningsanteckningarna vet vi att antalet lösningar är $\binom{14+3-1}{3-1} = \binom{16}{2} = 120$.

(d) Det finns tre val per gren, dvs vi kan placera en röd, en blå eller en grön boll på den. Antalet möjligheter är således 3^{14}.

(e) De 5 röda bollarna kan väljas på $\binom{20}{5}$ sätt, de 6 blåa bollarna kan väljas på $\binom{20}{6}$ sätt och de 3 gröna bollarna kan väljas på $\binom{20}{3}$ sätt. Antalet möjligheter för dekorationen, enligt multiplikationsprincipen, är $\binom{20}{5} \times \binom{20}{6} \times \binom{20}{3}$.

6. (a) Graferna sags vara isomorfa om det finns en bijektion $\phi : V_1 \to V_2$ sådan att, för två noder $a_1, b_1 \in V_1$, $\{a_1, b_1\} \in E_1$ om och endast om $\{\phi(a_1), \phi(b_1)\} \in E_2$.

(b) En isomorfi $\phi : G_1 \to G_2$ ges av

$$(a, b, c, d, e, f, g) \xrightarrow{\phi} (B, A, C, E, G, D, F).$$

(c) Noderna d och e har udda grad (5 resp. 1) medan att alla övriga noderna har jämn grad. Således har grafen ingen Eulercykel, däremot har den en Eulerväg mellan d och e. Ett exempel på en sådan väg är följande:

$$d \to b \to a \to c \to b \to f \to c \to d \to f \to g \to d \to e.$$

7. Först kom ihåg att $f(k) = f(n-k)$, dvs $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ty antalet sätt att välja k st ur n föremål är lika med antalet sätt att välja bort $n-k$ st. Detta innebär att det räcker, för att bevisa satsen, att bevisa att $f(k) \le f(k+1)$ då $k < n/2$. Men

$$\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!\,(n-k)!}} = \frac{k!}{(k+1)!} \times \frac{(n-k)!}{(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Så $f(k) \le f(k+1)$ om och endast om $n - k \ge k + 1$, dvs omm $k \le (n-1)/2$. Eftersom k är alltid ett heltal så har vi visat att $f(k) \le f(k+1)$ då $k < n/2$, v.s.v.