Lösningar Inledande Diskret Matematik 18/1 -14

1) $\dfrac{\begin{array}{c} p \to q \\ q \end{array}}{\neg p}$ motex skalla ha
$p: S$ $q: S$ vilket gör $p \to q: S$
motex. finns ej taut

$\dfrac{\begin{array}{c} p \to r \\ q \wedge \neg r \end{array}}{\neg p}$ motex skall ha
$p: S$ $q: S$ $r: F$ vilket gör
$p \to r: F$
motex. saknas tautologi

$\dfrac{\begin{array}{c} p \wedge r \\ q \wedge \neg r \end{array}}{\neg p}$ mot ex skall ha
$p: S$, $q: S$ $r: F$ vilket gör $p \wedge r: F$
motex saknas tautologi

$\dfrac{\begin{array}{c} p \wedge r \\ q \wedge \neg r \end{array}}{p}$ motex skall ha
$p: F$ $q: S$ $r: F$ vilket gör $p \wedge r: F$
motex saknas tautologi

2) $2^{17} = 2^{3 \cdot 5} \cdot 2^2 = 8^5 \cdot 4 \equiv 1^5 \cdot 4 = 4$

$3^{15} = 3^{2 \cdot 7} \cdot 3 = 9^7 \cdot 3 \equiv 2^7 \cdot 3 = 2^{3 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 3$

$\equiv 2 \cdot 3 = 6$

Svar: $4 + 6 = 10 \equiv \underline{\underline{3}}$

3) $34x + 24y = 8$

$17x + 12y = 4$

Euklides alg:

$17 = 12 + 5$

$12 = 2\cdot 5 + 2$

$5 = 2\cdot 2 + 1$

Bezouts id.

$1 = 5 - 2\cdot 2 = 5 - 2(12 - 2\cdot 5) = 5\cdot 5 - 2\cdot 12$

$= 5(17 - 12) - 2\cdot 12 = 5\cdot 17 - 7\cdot 12$

$4 = 20\cdot 17 - 28\cdot 12 = 20\cdot 17 - 28\cdot 12 + n\cdot 17\cdot 12 - n\cdot 17\cdot 12$

$$\begin{cases} x = 20 + 12n \\ y = -28 - 17n \end{cases}$$

eller $\begin{cases} x = 8 + 12n \\ y = -11 - 17n \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4 + 12n \\ y = 6 - 17n \end{cases}$

4) AVLYSSNINGSSTATION

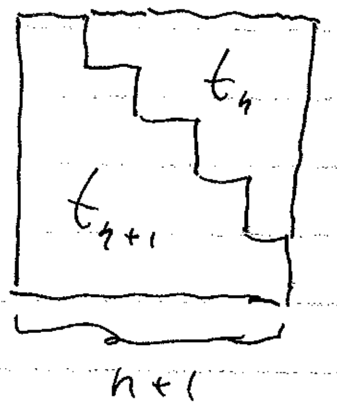
2 st A, 4 st S, 3 st N, 2 T, 2 I

Svar: $\dfrac{18!}{4!\,3!\,2^3}$

5)
$$t_{n+1}+t_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{(n+1)}{2}\left(n+2+n\right) = \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)^2$$
$$\left(t_{n+1}-t_n\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{(n+1)(n+2-n)}{2}\right)^2 = (n+1)^2$$

$$t_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Ett annat bevis är baserat på att $t_n = \sum_{k=1}^{n} k$



6) I $\mathbb{Z}_7$ har vi

$[1]^2 = [1]$
$[2]^2 = [4]$
$[3]^2 = [9] = [2]$
$[4]^2 = [16] = [2]$
$[5]^2 = [25] = [4]$
$[6]^2 = [36] = [1]$

så
$$\sqrt{[2]} = \begin{cases} [3] \\ [4] \end{cases} = \pm[3]$$

7) De enda bijektionerna $A \to B$ är
$\psi(a) = \alpha$, $\psi(b) = \beta$ och $\psi(a) = \beta$, $\psi(b) = \alpha$

Låt $g \circ f$ vara en av dessa, säg ψ

Då måste f avbilda a och b på två olika element i C ~~som vilket kan~~ ske på $3 \cdot 2$ sätt

Dessa element avbildas vidare av g till α och β så det återstår att välja g på det tredje elementet i C vilket ger två möjliga bilder.

Svar: $2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 2) = 24$

8) Om talet x har k siffror kan siffersumman vara högst $9k$.

$k = 4$ ger $x \leq 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144$

så x kan inte vara 4-siffrigt.

I själva verket kan vi redan här se att x inte kan vara 3-siffrigt heller ty

$k = 3$ ger $x \leq 4 \cdot 9 \cdot 3 = 108$

som i och för sig är 3 siffrigt

men med 1:a siffran 1 så

$x \leq 4(1 + 2 \cdot 9) = 76$

Om vi är mindre smarta ansätter vi

$x = 100a + 10b + c$ och får

$100a + 10b + c = 4(a+b+c) = 4a + 4b + 4c$

$96a + 6b = 3c$

$32a + 2b = c$

eftersom $c \leq 9$ kan inte $a > 0$

så $a = 0$, $c = 2b$ och möjliga x är

$\underline{\underline{12, 24, 36, 48}}$