Inledande diskret matematik D, HT2014
Lösningar till tentan 2014-01-18

1. En logisk formel sägs vara en *tautologi* om den är sann oavsett sanningsvärdena på de ingående Booleska variablerna. Här har vi tre variabler $p,\ q,\ r$ så det finns totalt 8 möjliga kombinationer av sanningsvärden. Det är lite opraktisk att testa alla möjligheter i varje deluppgift (totalt 32 fall), så vi försöker förenkla arbetet först. Alla fyra formlerna är implikationer, och en implikation är alltid sann då hypotesen är falsk. Så det enda intressanta fallet är då hypotesen är sann. Formeln är alltså en tautologi om och endast om slutsatsen är sann när som helst hypotesen är det eller, ekvivalent, om hypotesen är falsk när som helst slutsatsen är det. Sett omvänt, för att bevisa att en av formlerna inte är en tautologi så räcker det att hita en instans då slutsatsen är falsk trots att hypotesen är sann.

   (a) Ej en tautologi. Om p och q är sanna så är hypotesen sann men slutsatsen falsk.

   (b) En tautologi. Om hypotesen är sann så måste till att börja med $\neg r$ vara sann och därmed r falsk. Men då måste p också vara falsk för att $p \to r$ ska vara sann. Och därmed blir slutsatsen också sann.

   (c) En tautologi. Hypotesen innefattar $r \wedge \neg r$ som måste vara falsk. Så hypotesen är aldrig sann och därmed är implikationen alltid sann.

   (d) En tautologi av samma skäl som i (c).

2. Eftersom 7 är ett primtal så är $a^6 \equiv 1 \pmod 7$ då a inte är delbart med 7, enligt Fermats sats. Varken 2 eller 3 är delbara med 7 så vi kan räkna modulo 7 enligt:

$$\begin{aligned} 2^{17} &= (2^6)^3 \cdot 2^{-1} \equiv 1^3 \cdot 4 \equiv 4, \\ 3^{15} &= (3^6)^2 \cdot 3^3 \equiv (1)^2 \cdot 6 \equiv 6. \end{aligned}$$

   Så $2^{17} + 3^{15} \equiv 4 + 6 \equiv 3 \pmod 7$.

3. Vi kan dela igenom med 2 utan att ändra ekvationen och i stället lösa $17x+12y = 4$. Vi vet att det kommer att finnas lösningar ty SGD$(17, 12) = 1$. Euklides framåt ger

$$17 = 12 + 5, \quad 12 = 2 \cdot 5 + 2, \quad 5 = 2 \cdot 2 + 1,$$

   och sedan bakåt

$$\begin{aligned} 1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(12 - 2 \cdot 5) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12 = \\ = 5(17 - 12) - 2 \cdot 12 = 5 \cdot 17 - 7 \cdot 12. \end{aligned}$$

Multiplicera igenom med 4 för att få $4 = 20 \cdot 17 - 28 \cdot 12$, så en lösning till vår Diof. ekv. är $x_0 = 20$, $y_0 = -28$. Den allmänna lösningen ges av

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n, \quad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Här är $a = 17$, $b = 12$, $d = 1$ så den allmänna lösningen blir

$$x = 20 + 12n, \quad y = -28 - 17n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Det finns 18 bokstäver bland vilka vi har 2 förekomster av A, I, T, 3 förekomster av N och 4 förekomster av S. Således är antalet ord $\frac{18!}{(2!)^3 \times 3! \times 4!}$.

5. *Steg 1:* $\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 = t_1$, så basfallet $n = 1$ stämmer.

   Steg 2: Antag att $t_p = \frac{p(p+1)}{2}$. Det är enklast att stoppa in $\frac{(p+1)(p+2)}{2}$ för t_{p+1} och kolla att $t_{p+1} + t_p = (t_{p+1} - t_p)^2$ stämmer. VL blir

$$t_{p+1} + t_p = \frac{(p+1)(p+2)}{2} + \frac{p(p+1)}{2} =$$
$$= \frac{p+1}{2}[p + (p+2)] = \frac{p+1}{2}[2(p+1)] = (p+1)^2,$$

   medan att HL blir

$$\left[\frac{(p+1)(p+2)}{2} - \frac{p(p+1)}{2}\right]^2 = \left[\frac{p+1}{2}[(p+2) - p]\right]^2 =$$
$$= \left[\frac{p+1}{2} \cdot 2\right]^2 = (p+1)^2 = \text{VL}, \quad \text{v.s.v.}$$

6. Man kan räkna fram tabellen:

$x \pmod 7$	$x^2 \pmod 7$
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

   Så det finns två lösningar till $x^2 \equiv 2 \pmod 7$, nämligen $x \equiv 3 \vee 4 \pmod 7$.

7. (a) $2! = 2$. För det finns först 2 val för $f(a)$ och sedan ett val för $f(b)$, om f ska bli bijektiv.

(b) Om $g \circ f$ ska vara bijektiv så måste först f vara injektiv. Det finns alltså $3 \cdot 2 = 6$ möjligheter för f, ty man har först 3 val för $f(a)$ och sedan 2 val för $f(b)$ då f är injektiv. Notera att $f(A)$ är då ett 2-elements delmängd till C. g måste inducera en injektion från $f(A)$ till B, och det spelar ingen roll vart g skickar det tredje talet i C. Det finns $2! = 2$ möjligheter för hur g verkar på $f(A)$ (samma resonemang som i del (a)) och sedan ytterligare 2 val för vart det tredje talet i C ska skickas, så totalt $2 \cdot 2 = 4$ möjligheter för g.

Så det finns 6 möjligheter för f, och i varje fall sedan 4 möjligheter för g, därmed totalt $6 \cdot 4 = 24$ möjligheter för paret $(f,\ g)$.

8. Om talet är k-siffrigt så är det minst 10^{k-1} medan att siffersumman är högst $9k$. Så det är nödvändigt att $10^{k-1} \leq 36k$. Denna olikhet gäller endast för $k = 1,\ 2,\ 3$. Nu betraktar vi dessa tre fall separat.

Fall 1: $k = 1$. Ett ensiffrigt tal är dess egna siffersumma, så kan vara lika med fyra gånger densamma om och endast om siffran är noll, dvs om och endast om talet är noll. I Lemurell-Jonasson räknas noll som ett naturligt tal, så vi tar med detta som en lösning.

Fall 2: $k = 2$. Skriv talet som ab, dvs talet är $10a + b$, medan att siffersumman är $a + b$. Så kravet är att $10a + b = 4(a + b) \Leftrightarrow 2a = b$. Eftersom $1 \leq a \leq 9$ och $0 \leq b \leq 9$ så får vi fyra möjligheter: $12,\ 24,\ 36,\ 48$.

Fall 3: $k = 3$. Skriv talet som abc, dvs talet är $100a + 10b + c$, medan att siffersumman är $a+b+c$. Så kravet är att $100a+10b+c = 4(a+b+c) \Leftrightarrow c = 32a+2b$. Men $a \geq 1$ (annars skulle talet vara tvåsiffrigt) och $c \leq 9$ (det är en decimalsiffra), så $c = 32a + 2b$ är olösbar.

SVAR: Det finns fem sådana naturliga tal: $0,\ 12,\ 24,\ 36,\ 48$.