Inledande diskret matematik D, HT2014
Lösningar till tentan 2013-08-21

1. En logisk formel sägs vara en *tautologi* om den är sann oavsett sanningsvärdena på de ingående Booleska variablerna. Här har vi tre variabler p, q, r så det finns totalt 8 möjliga kombinationer av sanningsvärden. Det är lite opraktisk att testa alla möjligheter i varje deluppgift (totalt 32 fall), så vi försöker förenkla arbetet först. Alla fyra formlerna är implikationer, och en implikation är alltid sann då hypotesen är falsk. Så det enda intressanta fallet är då hypotesen är sann. Formeln är alltså en tautologi om och endast om slutsatsen är sann när som helst hypotesen är det eller, ekvivalent, om hypotesen är falsk när som helst slutsatsen är det. Sett omvänt, för att bevisa att en av formlerna inte är en tautologi så räcker det att hita en instans då slutsatsen är falsk trots att hypotesen är sann.

   (a) En tautologi. Om $p \to q$ och $q \to r$ är sanna då måste det även vara sann att $p \to r$.

   (b) En tautologi. Hypoteserna innefattar $\neg q$. För att hypoteserna ska vara sanna då måste q vara falsk. Men $p \to q$ ska också vara sann, så p måste vara falsk. I så fall är slutsatsen $p \to r$ automatiskt sann.

   (c) En tautologi. För att slutsaten skulle vara falsk så måste p vara sann och r falsk. Men den senare skulle innebära att även hypotesen är falsk.

2. Tja, det finns egentligen ingen anledning att köra Euklides, det är gôrlätt att se en lösning, t.ex. $x_0 = 1$, $y_0 = 4$. Den allmänna lösningen blir

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)n, \quad y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right)n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   Här är $a = 16$, $b = 1$, $d = 1$ så den allmänna lösningen är

$$x = 1 + n, \quad y = 4 + 16n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Enligt den Kinesiska Restsatsen så finns det en unik lösning modulo $17 \cdot 13 = 221$, som ges av

$$x \equiv 2(13b_1) + 3(17b_2) \pmod{221}, \tag{1}$$

   där $13b_1 \equiv 1 \pmod{17}$ och $17b_2 \equiv 1 \pmod{13}$. Vi hittar b_1, b_2 enligt

$$\begin{aligned} 1 \equiv 13b_1 \equiv -4b_1 \Rightarrow b_1 &\equiv 4 \pmod{17}, \\ 1 \equiv 17b_2 \Rightarrow 4b_2 &\equiv -3 \pmod{13}. \end{aligned}$$

   Insättning in i (1) ger $x \equiv 2 \cdot 4 \cdot 13 - 3 \cdot 3 \cdot 17 \equiv -49 \equiv 172 \pmod{221}$.

4. Det finns 23 bokstäver, däribland 2 förekomster av N, 3 av E, 4 av T och 5 av S. Antalet ord är således $\frac{23!}{2!\times 3!\times 4!\times 5!}$.

5. *Steg 1:* Kolla basfallet $n = 0$. $3^0 = 1$ och $x_0 = 1$ så det stämmer att $0 < x_0 \leq 3^0$.

   Steg 2: Det är uppenbart att x_n växer med n så det räcker att bevisa den övre gränsen $x_n \leq 3^n$. Antag att $x_p \leq 3^p$. Vi vill deducera tt $x_{p+1} \leq 3^{p+1}$. Vi har $x_{p+1} = 2x_p + 1 \leq 2 \cdot 3^p + 1 \leq 2 \cdot 3^p + 3^p = 3 \cdot 3^p = 3^{p+1}$, v.s.v.

6. (a) *Reflexiv:* $x\mathcal{R}x$ för $f(x) = f(x)$ ju, spelar ingen roll vad x är.
   Symmetrisk: Om $f(x) = f(y)$ så är även $f(y) = f(x)$.
   Transitiv: Om $f(x) = f(y)$ och $f(y) = f(z)$ så är även $f(x) = f(z)$.

   (b) För funktionen $f_1(x) = \lfloor x \rfloor$ så ligger två reella tal i samma ekvivalensklass om de har samma heltalsdel. Varje ekvivalensklass är alltså en intervall på formen $[z,\, z+1)$ där $z \in \mathbb{Z}$.

   (c) För funktionen $f_2(x) = (x) = x - \lfloor x \rfloor$, så ligger två tal i samma klass omm skillnaden dem emellan är ett heltal. Det finns alltså exakt en representant från varje klass i intervallet $[0,\, 1)$.

7. Nej, inte om g inte är surjektiv, det räcker att f är injektiv på värdemängden till g. Som ett motexempel tag t.ex. $f,\, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ enligt $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$, $g(n) = 2n$. Det är klart att g är injektiv medan att f inte är det, ty $f(2n+1) = f(2n)$. Men f är injektiv på de jämna talen och dessa utgör värdemängden till g. Mer precis, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ så det är såklart injektiv (t.o.m. bijektiv).

8. Poängen är att varje heltal är kongruent till dess egna siffersumma modulo 9, och det för att $10^k \equiv 1 \pmod 9$ för alla $k \in \mathbb{N}$. Gör vi en permutation av siffrorna så blir siffersumman densamma så skillnaden mellan siffersummorna blir noll. Därför blir även skillnaden mellan talen själva kongruent till noll modulo 9, v.s.v.