Tentamen
TMV210/MMGD10 Inledande Diskret Matematik, D1/GU

2015-10-24 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Matteo Molteni, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 22 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna. Preliminärt så krävs 32 poäng för betyget 4 och 42 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 13 november . Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. I uppgift 5 behöver man inte räkna ut svaren som decimaltal.

Uppgifterna

1. Vilka av följande argument är giltiga ? (6p)

$$\begin{array}{r} a \to (b \vee c) \\ \neg b \to \neg c \\ c \vee a \\ \hline b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} a \to (b \wedge c) \\ b \to \neg c \\ c \vee a \\ \hline b \end{array}$$

2. Låt $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden som definieras rekursivt av

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} \ \forall\, n \geq 2.$$

(a) Beräkna direkt a_4 (dvs utan att använda formeln i (b) nedan). (2p)

(b) Bevisa att $a_n = 5^n - 2^{n+1}$ för alla $n \geq 0$. (5p)

3. (a) Bestäm 2197^{2883} (mod 365). (5p)

(b) Låt oss förvränga verkligheten lite och anta att varje år har 365 dagar (29 februari är inställd !). Vad skulle datumet vara om 2197^{2883} dagar ? (1p)

Var god vänd!

4. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (5p)

$$38x + 55y = 60.$$

Bestäm även den lösning (x, y) sådan att $|x| + |y|$ är minimalt.

(b) Bestäm det minsta positiva heltalet x som uppfyller $38x \equiv 2 \pmod{55}$. (2p)

5. Liverpool spelar i Premier League tillsammans med 19 andra lag. En säsong består av 38 matcher, en hemma- och en bortamatch mot var och ett av de övriga lagen.

(a) Hur många möjligheter finns det för Liverpools spelschema om det enda kravet är att de ska alternera mellan hemma- och bortamatcher ? (3p)

(b) På hur många sätt kan Liverpool få ihop följande slutfacit, om man tar hänsyn till vem de slog, spelade oavgjort mot resp. förlorade mot ? (3p)

Hemma: 11 vinster, 6 oavgjorda, 2 förluster
Borta: 8 vinster, 6 oavgjorda, 5 förluster.

(c) Hur många möjligheter finns det för deras slutfacit (HV,HO,HF,BV,BO,BF) ? (3p)

Obs! Här tar man *inte* hänsyn till vilka de slog osv, bara till *antalet* hemmavinster (HV) osv.

6. (a) Bevisa att det inte finns någon enkel graf med 8 noder där noderna har graderna 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7. (4p)

(b) Om G är en enkel graf så är dess *komplement* G^c den enkla grafen som har samma noder som G och precis de kanter som G saknar.

i. Rita upp både $K_{3,3}$ och dess komplement. (1p)

ii. Bevisa att för varje enkel graf G gäller att minst en av G och G^c måste vara sammanhängande. (4p)

7. Låt $\mathbb{Z}^*$ beteckna mängden av alla heltal förutom noll. Definiera en relation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{Z}^*$ enligt regeln (6p)

$$a\,\mathcal{R}\,b \iff \text{det finns rationella tal } x \text{ och } y \text{ sådan att } \tfrac{a}{b} = x^2 + y^2.$$

Bevisa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/GU, 151024

1. (a) Argumentet är giltigt. Antag att slutsatsen var falsk men hypoteserna sanna. Då är b falsk, så $\neg b$ är sann. Eftersom $\neg b \to \neg c$ så medför detta att $\neg c$ är sann, och därmed att c är falsk. För att göra $c \vee a$ sann måste då a vara sann. Men detta säger emot att $a \to (b \vee c)$ för vi har redan visat att både b och c är falska.

(b) Argumentet är ogiltigt. T.ex. om a och b är falska medan c är sann, så är alla hypoteserna sanna men slutsatsen är falsk.

2. (a) Vi beräknar i tur och ordning

$$\begin{aligned} a_2 &= 7a_1 - 10a_0 = 7(1) - 10(-1) = 17, \\ a_3 &= 7a_2 - 10a_1 = 7(17) - 10(1) = 109, \\ a_4 &= 7a_3 - 10a_2 = 7(109) - 10(17) = 593. \end{aligned}$$

(b) Vi för ett starkt induktionsbevis.
Steg 1: Basfallet $n = 0$. $\mathrm{VL} = a_0 = -1$. $\mathrm{HL} = 5^0 - 2^1 = 1 - 2 = -1 = \mathrm{VL}$, v.s.v.
Steg 2: Antag att $a_n = 5^n - 2^{n+1}$ för alla $n \leq p$. Vi vill deducera att $a_{p+1} = 5^{p+1} - 2^{p+2}$. Enligt rekursionsformeln och induktionsypotesen har vi att

$$\begin{aligned} a_{p+1} = 7a_p - 10a_{p-1} = 7(5^p - 2^{p+1}) - 10(5^{p-1} - 2^p) = 5^{p-1}(7 \cdot 5 - 10) - 2^p(7 \cdot 2 - 10) = \\ = 25 \cdot 5^{p-1} - 4 \cdot 2^p = 5^2 \cdot 5^{p-1} - 2^2 \cdot 2^p = 5^{p+1} - 2^{p+2}, \quad \text{v.s.v.} \end{aligned}$$

3. (a) $365 = 5 \cdot 73$ så $\Phi(365) = (5-1)(73-1) = 4 \cdot 72 = 288$. Sedan är $2197 = 6 \cdot 365 + 7$ så $2197 \equiv 7 \pmod{365}$. Eftersom $\mathrm{SGD}(7, 365) = 1$ kan vi tillämpa Eulers sats som ger oss att $7^{288} \equiv 1 \pmod{365}$. Slutligen har vi då att

$$2197^{2883} \equiv 7^{2883} = (7^{288})^{10} \cdot 7^3 \equiv 1^{10} \cdot 7^3 \equiv 7^3 \equiv 343 \pmod{365}.$$

(b) Eftersom $343 \equiv -22 \pmod{365}$ så kommer datumet då att vara 22 dagar före dagens datum, alltså den 2 oktober.

4. (a) Vi kör Euklides algoritm på $(55, 38)$. Först framåt

$$\begin{aligned} 55 &= 38 + 17, \\ 38 &= 2 \cdot 17 + 4, \\ 17 &= 4 \cdot 4 + 1, \end{aligned}$$

sedan bakåt

$$\begin{aligned} 1 &= 17 - 4 \cdot 4 \\ &= 17 - 4(38 - 2 \cdot 17) \\ &= 9 \cdot 17 - 4 \cdot 38 \\ &= 9(55 - 38) - 4 \cdot 38 \\ &= 9 \cdot 55 - 13 \cdot 38. \end{aligned}$$

Om vi multiplicerar igenom med 60 får vi då

$$60 = 540 \cdot 55 - 780 \cdot 38$$

så en lösning till den Diofantiska ekvationen är $x_0 = -780$, $y_0 = 540$. Den allmänna lösningen ges av

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n, \quad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Här är $a = 38$, $b = 55$, $d = 1$ så den allmänna lösningen blir

$$x = -780 + 55n, \quad y = 540 - 38n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

För att miminera $|x| + |y|$ väljer man $n = 14$ och får lösningen $x = -10$, $y = 8$.

(b) Vi har sett ovan att
$$1 = 9 \cdot 55 - 13 \cdot 38.$$
Modulo 55 säger detta att $1 \equiv (-13) \cdot 38$, alltså att -13 är inversen till 38 modulo 55. Således om $38x \equiv 2 \pmod{55}$ så är $x \equiv (-13) \cdot 2 \equiv -26 \equiv 29 \pmod{55}$. Det minsta positiva talet som uppfyller detta är naturligtvis 29.

5. (a) Det finns 19! sätt att ordna hemmamatcherna, och lika många sätt att ordna bortamatcherna. Sedan måste man också välja om första matchen är hemma eller borta. Således blir antalet möjliga scheman $2 \times (19!)^2$.

(b) Det finns $\binom{19}{11}$ sätt att välja de 11 hemmavisnterna och sedan $\binom{8}{6}$ sätt att välja de oavgjorda hemmamatcherna. Det finns $\binom{19}{8}$ sätt att välja bortavinsterna och sedan $\binom{11}{6}$ sätt att välja de oavgjorda bortamatcherna. Det totala antalet möjligheter blir således $\binom{19}{11} \times \binom{8}{6} \times \binom{19}{8} \times \binom{11}{6}$.

(c) För att underlätta med notationen låt a, b, c, d, e, f beteckna respektivt antalet HV, HO, HF, BV, BO, BF. Vi söker antalet lösningar i icke-negativa heltal till paret av ekvationer
$$a + b + c = 19, \quad d + e + f = 19.$$
I båda fallen handlar det om att placera 19 identiska bollar i 3 åtskiljbara lådor, något som kan göras på $\binom{19+3-1}{3-1} = \binom{21}{2} = 210$ sätt. Antalet möjliga facit är således $210^2 = 44100$.

6. (a) Vi för ett motsägelsebevis och antar att en sådan graf finns. Kalla noderna för $v_1, v_2, \ldots, v_8$. Det finns en nod av grad 7 så den måste vara kopplad till alla andra noderna. WLOG är denna nod v_1. Det finns tre noder av grad 1 och WLOG är dessa v_2, v_3 och v_4. Så v_1 är den enda noden som dessa tre är kopplade till. Men det finns en nod av grad 5, som WLOG är v_5. Den är kopplad till fem andra noder och således måste vara kopplad till minst en av v_2, v_3 och v_4 - motsägelse !

(b) i. Se bilden på det bifogade bladet.

ii. Antag att G är osammanhängande. Vi måste bevisa att G^c är i så fall sammanhängande. Eftersom G är osammanhängande så består den av minst två sammanhängande komponenter. Låt $C_1, C_2, \ldots, C_k$ beteckna dess komponenter och låt v, w vara två godtyckliga noder i G. Vi måste bevisa att det finns en väg från v till w i G^c. Vi betraktar två fall:
Fall 1: v och w tillhör olika komponenter i G. I så fall finns det ingen kant dem emellan i G och därför *finns* det en sådan kant i G^c. Så det finns en väg av längd 1 från v till w i G^c.
Fall 2: v och w tillhör samma komponent i G. Eftersom G har minst två komponenter så finns det minst en nod z som tillhör en annan komponent än den som innehåller v och w. Då finns det ingen kant i G mellan z och varken v eller w. Följdaktligen *finns* det en kant i G^c mellan z och var och en av v och w. Således kan man ta sig i G^c från v till w via z, alltså via en väg av längd 2.

7. *Reflexivitet:* $\frac{a}{a} = 1 = (\text{t.ex.}) = 1^2 + 0^2$.
Symmetri: Antag att $\frac{a}{b} = x^2 + y^2$. Då är
$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a/b} = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2.$$
Notera att det är tillåtet ovan att dela med $x^2 + y^2$, ty $\frac{a}{b} \neq 0$. Om x och y är rationella tal så också är $\frac{x}{x^2+y^2}$ och $\frac{y}{x^2+y^2}$. Så vi har visat att $b \, \mathcal{R} \, a$.
Transitivitet: Antag att $a \, \mathcal{R} \, b$ och att $b \, \mathcal{R} \, c$. Då finns det rationella tal x, y, z, w sådana att
$$\frac{a}{b} = x^2 + y^2, \qquad \frac{b}{c} = z^2 + w^2.$$

Således är

$$\frac{a}{c} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{c}\right) = (x^2+y^2)(z^2+w^2) = \cdots = (xz-yw)^2 + (xw+yz)^2.$$

Talen $xz - yw$ och $xw + yz$ är uppenbarligen också rationella så vi har visat att $a\,\mathcal{R}\,c$, v.s.v.