Inledande diskret matematik D, HT2014
Lösningar till tentan 2014-10-25

1. En logisk formel sägs vara en *tautologi* om den är sann oavsett sanningsvärdena på de ingående Booleska variablerna. Här har vi tre variabler $p,\ q,\ r$ så det finns totalt 8 möjliga kombinationer av sanningsvärden. Det är lite opraktisk att testa alla möjligheter i varje deluppgift (totalt 32 fall), så vi försöker förenkla arbetet först. Alla fyra formlerna är implikationer, och en implikation är alltid sann då hypotesen är falsk. Så det enda intressanta fallet är då hypotesen är sann. Formeln är alltså en tautologi om och endast om slutsatsen är sann när som helst hypotesen är det eller, ekvivalent, om hypotesen är falsk när som helst slutsatsen är det. Sett omvänt, för att bevisa att en av formlerna inte är en tautologi så räcker det att hita en instans då slutsatsen är falsk trots att hypotesen är sann.

   (a) En tautologi. Antag att hypoteserna är sanna. Då måste $p \to q$ vara sann. Så om p är sann så är q också det. Om p är falsk då är $p \to q$ sann, men den andra hypotesen $p \vee q$ kan sedan vara sann endast då q är sann. Så hur som helst måste q vara sann för att både hypoteserna ska vara det, v.s.v.

   (b) Ej en tautologi. Om både p och q är falska så är både $p \to q$ och $p \vee \neg q$ sanna, medan att slutsatsen q är falsk.

   (c) Ej en tautologi. Om p är falsk så är både hypoteserna sanna, även om slutsatsen q är också falsk.

   (d) En tautologi. Om $p \wedge q$ ska vara sann så måste q vara det.

2. Vi kan räkna modulo 11 enligt

$$2^7 = 2^5 \cdot 2^2 \equiv (-1) \cdot 4 \equiv 7,$$
$$3^8 = (3^2)^4 \equiv (-2)^4 \equiv 16 \equiv 5.$$

   Så $2^7 + 3^8 \equiv 7 + 5 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}$.

3. Vi kan dela igenom med 2 utan att ändra ekvationen och i stället lösa $6x+37y = 8$. Vi vet att det kommer att finnas lösningar ty SGD$(6,\ 37) = 1$. Euklides framåt ger direkt $37 = 6 \cdot 6 + 1$, så bakåt ger direkt $1 = -6 \cdot 6 + 1 \cdot 37$. Multiplicera igenom med 8 för att få $8 = -48 \cdot 6 + 8 \cdot 37$, så en lösning till vår Diof. ekv. är $x_0 = -48$, $y_0 = 8$. Den allmänna lösningen ges av

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n, \quad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   Här är $a = 6$, $b = 37$, $d = 1$ så den allmänna lösningen blir

$$x = -48 + 37n, \quad y = 8 - 6n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Det finns 15 bokstäver, bland vilka vi har 2 förekomster av var och en av D, Ä, L, samt 3 förekomster av R. Antalet ord är således $\frac{15!}{(2!)^3 \cdot 3!}$.

5. *Ej reflexiv*: Om $f\mathcal{R}f$ så måste $f(0) + f(1) = f(0) - f(1)$ gälla, dvs $f(1) = 0$ måste gälla. Så t.ex. $f(x) = x$ är ett motexempel.

   Ej symmetrisk: Om $f\mathcal{R}g$ så måste $f(0)+f(1) = g(0)-g(1)$ gälla medan att, om $g\mathcal{R}f$ så måste $g(0)+g(1) = f(0)-f(1)$ gälla. Adderar man dessa två ekvationer får man $2f(0) = 2g(0)$, och följdaktligen $f(0) = g(0)$. Så för ett motexempel räcker det att hitta f och g sådan att $f(0) \neq g(0)$ men $f(0)+f(1) = g(0)-g(1)$. T.ex. tag $f(x) = x$, $g(x) = 2 - x$.

   Ej transitiv: Tag $f(x) = x$, $g(x) = -x^2$. Då är $f(0) + f(1) = 0 + 1 = 1 = 0 - (-1) = g(0) - g(1)$ samt $f(0) = g(0) = 0$ så, enligt analysen för symmetri, gäller $f\mathcal{R}g$ och $g\mathcal{R}f$. Men $(f,\ f) \notin \mathcal{R}$ ty $f(1) \neq 0$ (se ovan).

6. SGD$(2,\ 17) = 1$ så det finns en unik lösning i $\mathbb{Z}_{17}$, nämligen $x \equiv 2^{-1} \cdot 9 \equiv 9 \cdot 9 = 81 \equiv 13$.

   SVAR: $x \equiv 13 \pmod{17}$.

7. Tanken är att man ska bevisa det med induktion.

   Steg 1: Kolla basfallet $n = 2$. VL $= 3 + 2^2 = 7 <$ HL $= 3^2 = 9$.

   Steg 2: Antag att $3 + 2^p < 3^p$. Vi vill deducera att $3 + 2^{p+1} < 3^{p+1}$. Man kan göra så här t.ex.:

   $$3 + 2^{p+1} = 3 + 2 \cdot 2^p < 3 + 2(3^p - 3) < 2 \cdot 3^p < 3 \cdot 3^p = 3^{p+1}, \quad \text{v.s.v.}$$

8. HL är antalet sätt att välja n föremål ur $2n$ st. Betrakta nu VL. Fördela de $2n$ föremålen i två grupper av n st. Kalla grupperna för A och B. När man sedan väljer n föremål ur $2n$ så kan man tänka sig att man först väljer ett $k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n\}$ och sedan väljer k st ur grupp A och $n - k$ st ur grupp B. För ett fixt k så finns det $\binom{n}{k}$ sätt att göra urvalet ur grupp A och $\binom{n}{n-k}$ sätt att göra urvalet ur grupp B. Enligt multiplikationsprincipen så finns det därmed $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ sätt att göra hela urvalet, fortfarande för fixt k. Slutligen notera att $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ och summera över k för att få det totala antalet sätt att göra urvalet av n ur $2n$, dvs VL = $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$, v.s.v.