Tentamen
TMV210/MMGD10 Inledande Diskret Matematik, D1/GU

2016-08-26 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 0766 377 873

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 22 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2015. Preliminärt så krävs 32 poäng för betyget 4 och 42 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 16 september. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. I uppgift 5 behöver man inte räkna ut svaren som decimaltal.

Uppgifterna

1. Vilka av följande argument är giltiga ? (6p)

$$\begin{array}{r} a \to b \vee c \\ c \to b \vee d \\ d \to a \wedge b \\ \hline a \to c \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} a \to b \vee c \\ c \to b \vee d \\ d \to a \wedge b \\ \hline a \to b \end{array}$$

2. Låt $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden som definieras rekursivt av

$$a_0 = 2, \quad a_1 = -1, \quad a_n = 5a_{n-1} + 14a_{n-2} \;\; \forall\, n \geq 2.$$

(a) Bevisa att $a_n = \frac{1}{3}\left(7^n + 5 \cdot (-2)^n\right)$ för alla $n \geq 0$. (5p)

(b) Låt $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden som definieras enligt $b_n = a_{n+2}$. Bestäm C_1 och C_2 sådana att $b_n = C_1 \cdot 7^n + C_2 \cdot (-2)^n$. (2p)

3. (a) Primtalsfaktorisera 11055 och bestäm $\Phi(11055)$. (3p)

(b) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (5p)

$$27x + 19y = 30.$$

Bestäm även den lösning $(x,\, y)$ sådan att $|x| + |y|$ är minimalt.

Var god vänd!

4. (a) Bestäm $7^{130} \pmod{43}$. (3p)

(b) Bestäm det minsta positiva heltalet x som uppfyller (4p)

$$x \equiv 1 \pmod{7}, \quad 11x \equiv 1 \pmod{43}.$$

5. I skrivandets stund så har OS pågått i 11 dagar och Sverige har tagit 6 medaljer. (8p)

(a) Om man har noll koll i övrigt på OS, hur många möjligheter finns det för Sveriges facit (G, S, B), där G (resp. S, B) är antalet vunna guld- (resp. silver-, brons-) medaljer ?

(b) Hur många möjligheter finns det för de dagar på vilka Sverige har tagit medaljerna om (i) man vet att de har aldrig tagit tre eller fler medaljer på en och samma dag (ii) man tar hänsyn till *antalet* vunna medaljer per dag, men i övrigt betraktar medaljerna som identiska (dvs man tar ej hänsyn till deras valörer eller i vilka grenar de vanns) ?

(c) Säg nu att du vet att $G = 1$, $S = 4$ och $B = 1$. OS innehåller 306 grenar. Hur många möjligheter finns det för listan av grenarna i vilka Sverige har tagit medaljerna om (i) man vet att de har aldrig tagit två eller fler medaljer i en och samma gren (ii) man tar hänsyn till valören av medaljen i varje gren.

6. (a) Rita en graf med 6 noder där gradtalen av noderna är 2, 3, 3, 4, 4, 4. Döpa noderna till a, b, c, d, e, f (i den ordning du vill) och sedan ange en Eulerväg i din graf. (5p)

(b) Låt v och w vara noder på olika sidor av den bipartita grafen $K_{3,3}$. För $n \in \mathbb{N}$, låt w_n beteckna antalet vägar av längd n mellan v och w. Bestäm en formel för w_n. (Obs! Motivering behövs ej här. Full poäng för rätt svar). (3p)

7. Ett träd sägs vara *irreducibelt* om det innehåller inga noder av grad 2. Bevisa att ett irreducibelt träd med n noder har minst $\frac{n}{2} + 1$ löv. (Kom ihåg att ett *löv* är en nod av grad 1). (6p)

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/GU, 160105

1. (a) Argumentet är ogiltigt. T.ex. om a och b är sanna medan att c och d är falska så är alla tre hypoteser sanna medan att slutsatsen är falsk.

(b) Argumentet är giltigt. Om a är sann så måste antingen b eller c vara sann enligt första hypotesen. Om c vore sann så skulle antingen b eller d vara det, enligt den andra hypotesen. Om d vore sann så skulle även b vara det enligt den tredje hypotesen. Sammanlagt, om a är sann så är det oundvikligt att även b är det, så slutsatsen är sann.

2. (a) Vi för ett starkt induktionsbevis.

Steg 1: Basfallen $n = 0, 1$. Vi kontrollerar i tur och ordning att

$$\begin{aligned} 2 = a_0 &= \frac{1}{3}(7^0 + 5 \cdot (-2)^0) = \frac{1}{3}(1+5) = 2, \text{ korrekt,} \\ -1 = a_1 &= \frac{1}{3}(7^1 + 5 \cdot (-2)^1) = \frac{1}{3}(7-10) = -1, \text{ korrekt.} \end{aligned}$$

Steg 2: Antag att $a_n = \frac{1}{3}(7^n + 5 \cdot (-2)^n)$ för alla $n \le p$. Vi vill deducera att $a_{p+1} = \frac{1}{3}(7^{p+1} + 5 \cdot (-2)^{p+1})$. Enligt rekursionsformeln och induktionsypotesen har vi att

$$\begin{aligned} a_{p+1} &= 5a_p + 14a_{p-1} = \\ &= \frac{5}{3}(7^p + 5 \cdot (-2)^p) + \frac{14}{3}(7^{p-1} + 5 \cdot (-2)^{p-1}) = \\ &= 7^{p-1}\left(\frac{35}{3} + \frac{14}{3}\right) + 5 \cdot (-2)^{p-1}\left(-\frac{10}{3} + \frac{14}{3}\right) = \\ &= \frac{7^2}{3} \cdot 7^{p-1} + \frac{(-2)^2}{3} \cdot 5 \cdot (-2)^{p-1} = \frac{1}{3}\left(7^{p+1} + 5 \cdot (-2)^{p+1}\right), \text{ v.s.v.} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} b_n = a_{n+2} &= \frac{1}{3}(7^{n+2} + 5 \cdot (-2)^{n+2}) = \frac{1}{3}(7^2 \cdot 7^n + 5 \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^n) = \\ &= \frac{49}{3} \cdot 7^n + \frac{20}{3} \cdot (-2)^n \Rightarrow C_1 = \frac{49}{3} \text{ och } C_2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

3. (a) Talet är uppenbarligen delbart med 5 och liggande stolen ger $11055 = 5 \cdot 2211$. Siffersumman i talet 2211 är 6 så talet är delbart med 3. Vi fortsätter och får $11055 = 5 \cdot 3 \cdot 737$. Nu kan man prova sig fram och upptäcka att $737 = 11 \cdot 67$. Ty 67 är ett primtal så har vi en fullbordad faktorisering, nämligen $11055 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 67$. Slutligen har vi då att $\Phi(11055) = (3-1)(5-1)(11-1)(67-1) = 2 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 66 = 5280$.

(b) Vi kör Euklides algoritm på (27, 19). Först framåt

$$\begin{aligned} 27 &= 1 \cdot 19 + 8, \\ 19 &= 2 \cdot 8 + 3, \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2, \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1, \end{aligned}$$

sedan bakåt

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \\ &= 3 - (8 - 2 \cdot 3) \\ &= 3 \cdot 3 - 8 \\ &= 3(19 - 2 \cdot 8) - 8 \\ &= 3 \cdot 19 - 7 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot 19 - 7 \cdot (27 - 19) \\ &= -7 \cdot 27 + 10 \cdot 19. \end{aligned}$$

Mulltiplicera igenom med 30 så får vi

$$30 = -210 \cdot 27 + 300 \cdot 19.$$

Så en lösning är $(x_0, y_0) = (-210, 300)$. Den allmänna lösningen ges av

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n = -210 + 19n,$$
$$y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) n = 300 - 27n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Tar vi $n = 11$ så får vi $x = -1$, $y = 3$, och detta är självklart den lösning som minimerar $|x| + |y|$.

4. (a) 43 är ett primtal så Fermats sats säger att $a^{42} \equiv 1 \pmod{43}$, då $\mathrm{SGD}(a, 43) = 1$. Så vi har

$$7^{130} = 7^{3 \cdot 42 + 4} = (7^{42})^3 \cdot 7^4 \equiv 1^3 \cdot 7^4 = 7^2 \cdot 7^2 \equiv 6 \cdot 6 \equiv 36 \pmod{43}.$$

(b) Först konstatera att $11^{-1} \equiv 4 \pmod{43}$ så systemet av kongruenser kan skrivas om som

$$x \equiv 1 \pmod 7, \quad x \equiv 4 \pmod{43}.$$

Den allmänna lösningen är

$$x \equiv 1 \cdot b_1 \cdot 43 + 4 \cdot b_2 \cdot 7 \pmod{7 \cdot 43}, \tag{1}$$

där

$$43b_1 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow b_1 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow \text{tag } b_1 = 1,$$
$$7b_2 \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow b_2 \equiv -6 \pmod{43} \Rightarrow \text{tag } b_2 = -6.$$

Insättning in i (1) ger

$$x \equiv 1 \cdot 1 \cdot 43 - 4 \cdot 6 \cdot 7 \pmod{301} \equiv -125 \equiv 176 \pmod{301}.$$

Det minsta positiva talet som uppfyller detta är naturligtvis $x = 176$.

5. (a) Vi söker antalet lösningar till $G + S + B = 6$ där G, S, B är heltal större än eller lika med noll. Enligt Exempel 2.11 i föreläsningsanteckningarna är antalet lösningar $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$.

(b) Först finns det följande fyra alternativ:

(i) Sverige vann 1 medalj på var och en av sex olika dagar

(ii) Sverige vann en medalj på var och en av fyra olika dagar, samt 2 medaljer på en dag

(iii) Sverige vann 1 medalj på var och en av två olika dagar, samt 2 medaljer på var och en av två olika dagar

(iv) Sverige vann två medaljer på var och en av tre olika dagar.

Antalet möjligheter för dagarna i var och ett av dessa fyra fall är
(i) $\binom{11}{6}$, (ii) $\binom{11}{4} \times 7$, (iii) $\binom{11}{2} \times \binom{9}{2}$, (iv) $\binom{11}{3}$.
Enligt additionsprincipen så ges det totala antalet möjligheter för de dagar på vilka Sverige tog medaljerna av

$$\binom{11}{6} + \binom{11}{4} \times 7 + \binom{11}{2} \times \binom{9}{2} + \binom{11}{3} = \cdots = 4917.$$

(c) Det finns 306 möjligeheter för guldgrenen, sedan $\binom{305}{4}$ möjligheter för de fyra silvergrenarna, sedan 301 möjligheter för bronsgrenen. Enligt multiplikationsprincipen har vi totalt $306 \times \binom{305}{4} \times 301 = \cdots = 32,561,145,487,080$ möjligheter.

6. (a) Se den bifogade Figur 1. Ett exempel på en Eulerväg i den figuren är

$$b \to a \to f \to d \to e \to a \to d \to c \to f \to b \to c.$$

(b) Det finns inga vägar om n är jämnt för efter ett jämnt antal steg skulle vi hamna på samma sida av grafen där vi började. Annars finns det tre val för varje steg (alltså tre kanter utifrån nuvarande nod) förutom det sista steget där vi har bara ett val ty vi måste hamna i noden w. Analysen ger alltså följande formel:

$$w_n = \begin{cases} 0, & \text{om } n \text{ är jämnt,} \\ 3^{n-1}, & \text{om } n \text{ är udda.} \end{cases}$$

7. Vi har gradekvationen

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2|E(G)|. \tag{2}$$

Antag att det finns k löv och $n-k$ icke-löv. Vi vet för ett träd att $|E| = n-1$ gäller. Enligt antagande så är $\deg(v) \geq 3$ för varje icke-löv v. Så VL av (2) är minst $3(n-k)+k$, så vi måste ha $3(n-k)+k \leq 2(n-1)$, som leder till $k \geq \frac{n}{2}+1$, v.s.v.