Inledande diskret matematik D, HT2014
Lösningar till tentan 2013-10-26

1. En logisk formel sägs vara en *tautologi* om den är sann oavsett sanningsvärdena på de ingående Booleska variablerna. Här har vi tre variabler p, q, r så det finns totalt 8 möjliga kombinationer av sanningsvärden. Det är lite opraktisk att testa alla möjligheter i varje deluppgift (totalt 32 fall), så vi försöker förenkla arbetet först. Alla fyra formlerna är implikationer, och en implikation är alltid sann då hypotesen är falsk. Så det enda intressanta fallet är då hypotesen är sann. Formeln är alltså en tautologi om och endast om slutsatsen är sann när som helst hypotesen är det eller, ekvivalent, om hypotesen är falsk när som helst slutsatsen är det. Sett omvänt, för att bevisa att en av formlerna inte är en tautologi så räcker det att hita en instans då slutsatsen är falsk trots att hypotesen är sann.

   (a) En tautologi. För att hypoteserna ska vara sanna så måste till att börja med $r \wedge q$ vara sann. Speciellt är q sann så $\neg q$ är falsk, så om $p \vee \neg q$ ska vara sann så måste p vara det. Så både p och r blir sanna, dvs slutsatsen $p \wedge r$ är sann.

   (b) Ej en tautologi. Om p är falsk och q sann så är hypotesen sann men slutsatsen falsk.

   (c) En tautologi. Hypotesen innefattar $\neg q \wedge q$ som måste vara falsk. Så hypotesen är aldrig sann och därmed är implikationen alltid sann.

   (d) En tautologi av samma skäl som i (c).

2. Vi kan dela igenom med 3 utan att ändra ekvationen och i stället lösa $13x - 11y = 5$. Vi vet att det kommer att finnas lösningar ty SGD$(13, 11) = 1$. Euklides framåt ger

$$13 = 11 + 2, \quad 11 = 5 \cdot 2 + 1,$$

   och sedan bakåt

$$1 = 11 - 5 \cdot 2 = 11 - 5(13 - 11) = 6 \cdot 11 - 5 \cdot 13.$$

   Multiplicera igenom med 5 för att få $5 = -25 \cdot 13 + 30 \cdot 11$, så en lösning till vår Diof. ekv. är $x_0 = -25$, $y_0 = -30$. Den allmänna lösningen ges av

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n, \quad y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   Här är $a = 13$, $b = 11$, $d = 1$ så den allmänna lösningen blir

$$x = -25 + 11n, \quad y = -30 + 13n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Enligt den Kinesiska Restsatsen så finns det en unik lösning modulo $7 \cdot 11 = 77$, som ges av

$$x \equiv 3(11b_1) + 2(7b_2) \pmod{77}, \tag{1}$$

där $11b_1 \equiv 1 \pmod 7$ och $7b_2 \equiv 1 \pmod{11}$. Vi hittar $b_1,\ b_2$ enligt

$$1 \equiv 11b_1 \equiv 4b_1 \Rightarrow b_1 \equiv 2 \pmod 7,$$
$$1 \equiv 7b_2 \Rightarrow b_2 \equiv 7^{-1} \equiv -3 \pmod{11}.$$

Insättning in i (1) ger $x \equiv 3 \cdot 2 \cdot 11 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \equiv 24 \pmod{77}$.

4. *Steg 1:* Kollabasfallet $n = 1$. HL = $1 \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 3$. VL = $\sum_{k=1}^{2} k = 1 + 2 = 3 =$ HL, v.s.v.

   Steg 2: Antag att

$$\sum_{k=1}^{2p} k = p(2p+1). \tag{2}$$

   Vi vill deducera att

$$\sum_{k=1}^{2p+2} k = (p+1)(2p+3). \tag{3}$$

   Som vanligt, tricket är att dela upp summan i (3) s.a. (2) kan användas:

$$\sum_{k=1}^{2p+2} k = \left(\sum_{k=1}^{2p} k\right) + [(2p+1) + (2p+2)] =$$
$$= p(2p+1) + (4p+3) = 2p^2 + 5p + 3 = (p+1)(2p+3), \quad \text{v.s.v.}$$

5. Förresten, "kåk" är "full house" på engelska, inte "full hand". Givet består av 5 kort, 3 av dessa ska finnas i ett värde och 2 i ett annat värde. Till att börja med finns det 13 val för värdet av trisset och 12 val för värdet av paret, alltså $13 \cdot 12$ val för värdena i kåket. Sedan finns det $\binom{4}{3} = 4$ val för färgena i trisset och $\binom{4}{2} = 6$ val för färgerna i paret. Så det totala antalet möjliga kåk är $13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3744$.

6. Det gäller i första hand att bestämma $15^{15} \pmod{17}$. Först noterar vi att $15^{15} \equiv (-2)^{15} \equiv -2^{15} \pmod{17}$. Eftersom 17 är ett primtal säger Fermats sats att $a^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ då a inte är delbart med 17. Detta gäller förstås 2, så vi kan räkna så här:

$$-2^{15} \equiv -2^{16} \cdot 2^{-1} \equiv -1 \cdot 2^{-1} \equiv -1 \cdot 9 \equiv 8 \pmod{17}.$$

   Så den kongruens vi vill lösa blir till $8x \equiv 2 \pmod{17} \Leftrightarrow x \equiv 8^{-1} \cdot 2 \equiv (-2) \cdot 2 \equiv -4 \pmod{17}$. SVAR: $x \equiv -4 \pmod{17}$.

7. (a) En relation på en mängd S är, per definition, en delmängd till den Cartesiska produkten $S \times S$. Om S har n element så har $S \times S$ n^2 element. Så antalet delmängder till denna är 2^{n^2}, och detta blir antalet relationer på S.

   (b) Vi kan föreställa oss att $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Om relationen är både symmetrisk och reflexiv så är den enda frågan vilka par (i, j), med $i < j$, som tillhör S. Det finns $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ sådana par, och relationen bestäms av ett val av en delmängd till dessa. Så antalet relationer i detta fall är $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

8. Här tolkar jag *positiv* som strängt positiv, alltså noll ingår ej. Vi söker lösningarna i positiva heltal till

$$n + m = nm. \tag{4}$$

Om vi antar att $n \geq m$ så är $n + m \leq 2n$, så vi måste åtminstone ha $m \leq 2$ om (4) ska gälla. Detta ger två fall.

Fall 1: $m = 1$. Då säger (4) att $n + 1 = n$, som är ju omöjligt.

Fall 2: $m = 2$. Då säger (4) att $n + 2 = 2n$ så $n = 2$ också. Så det finns bara en möjlighet, nämligen $m = n = 2$.