Lösningar till inledande diskret matematik
27/10 -12

1) $(p\to q)\wedge(q\to r)\to(p\to r)$

ett motex har $p\to r$: F dvs p : S, r : F

$q\to r$: S ger q : F och då blir $p\to q$: F
så motex. saknas. tautologi

$(p\to q)\wedge(q\to p)\to p$
motex har p : F $q\to p$: S ger q : F
och $p\to q$ blir S
inte tautologi

$(p\to q)\wedge(\neg p\to q)\to q$
motex har q : F $\neg p\to q$: S ger $\neg p$: F
dvs p : S och $p\to q$ blir F så motex saknas
tautologi

2) $2^{75}=(2^2)^{37}2\equiv 4^{37}\cdot 2\equiv 1^{37}\cdot 2=2 \mod 3$

Svar: 2

3) 11 bokstäver ger 11! permutationer men S upprepas 3 ggr, A 2 ggr och L 2 ggr

Svar $\dfrac{11!}{3!\cdot 2\cdot 2}$

4) $74x - 14y = 8$

$37x - 7y = 4$

Euklides algoritm

$37 = 5\cdot 7 + 2$

$7 = 3\cdot 2 + 1$

Bezouts id

$1 = 7 - 3\cdot 2 = 7 - 3(37 - 5\cdot 7) = 16\cdot 7 - 3\cdot 37$

$4 = 64\cdot 7 - 12\cdot 37 + n\cdot 7\cdot 37 - n\cdot 7\cdot 37$

$$\begin{cases} x = -12 + 7n \\ y = -64 + 37n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 7n \\ y = 10 + 37n \end{cases}$$

5) $\sum_{1}^{n}(2k-1) = n^2$

Bevis induktion

basfall $n=1$, V.L. $= \sum_{1}^{1} 2k-1 = 2-1 = 1$, H.L. $= 1^2 = 1$

induktionssteg från n till $n+1$

V.L. $= \sum_{1}^{n+1} 2k-1 = \sum_{1}^{n}(2k-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ $=$ H.L.

$$\sum_{1}^{n} 2k = 2\sum_{1}^{n} k = 2\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Om vi vill göra det med induktion är induktionssteget $\sum_{1}^{n+1} 2k = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$

Märk f.ö. att $\sum_{k=1}^{2n} k = \sum_{\text{udda}} k + \sum_{\text{jämna}} k = n^2 + n(n+1) =$

$= n(2n+1) = \frac{2n(2n+1)}{2}$

6) F blir injektiv om f och g är det och $g(C) \cap B = \emptyset$. Allt annat ger minst en dubbelt träffad punkt i $B \cup D$

7) $[2]x - [7] = [12]$

$$[2]x = [19]$$

Bezouts id $35 - 2 \cdot 17 = 1$

så inversen till 2 i $\mathbb{Z}_{35}$ är -17

$x = [-17][19] = [18][19] = [342] = [27]$

8) Pythagoras sats ger $a^2+b^2=c^2$

så mod 3 har vi $[a]^2+[b]^2=[c]^2$

Kvadrater mod 3

$$[0]^2 = [0]$$
$$[1]^2 = [1]$$
$$[2]^2 = [1]$$

så de enda Pythagoreiska id är

$$[0]+[0]=[0]$$
$$[0]+[1]=[1]$$

I den första är alla sidor delbara med 3

i den andra en av de kortare