Inledande diskret matematik D, HT2014
Lösningar till tentan 2012-10-27

1. En logisk formel sägs vara en *tautologi* om den är sann oavsett sanningsvärdena på de ingående Booleska variablerna. Här har vi tre variabler p, q, r så det finns totalt 8 möjliga kombinationer av sanningsvärden. Det är lite opraktisk att testa alla möjligheter i varje deluppgift (totalt 32 fall), så vi försöker förenkla arbetet först. Alla fyra formlerna är implikationer, och en implikation är alltid sann då hypotesen är falsk. Så det enda intressanta fallet är då hypotesen är sann. Formeln är alltså en tautologi om och endast om slutsatsen är sann när som helst hypotesen är det eller, ekvivalent, om hypotesen är falsk när som helst slutsatsen är det. Sett omvänt, för att bevisa att en av formlerna inte är en tautologi så räcker det att hita en instans då slutsatsen är falsk trots att hypotesen är sann.

   (a) En tautologi. Om p implicerar q och q implicerar r så måste även p implicera r.

   (b) Ej en tautologi. Om både p och q är falska så är hypotesen sann men slutsatsen falsk.

   (c) En tautologi. Hypotesen säger att q är sann oavsett om p är sann eller falsk. I så fall måste q vara sann helt enkelt, dvs slutsatsen är sann.

2. $2^{75} \equiv (-1)^{75} \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$.

3. Det finns 11 bokstäver, däribland 2 förekomster av A och L, plus 3 förekomster av S. Således är antalet ord $\frac{11!}{2!\times 2!\times 3!}$.

4. Vi kan dela med två och få ekvationen $37x - 7y = 4$. Euklides framåt ger

$$37 = 5 \cdot 7 + 2, \qquad 7 = 3 \cdot 2 + 1,$$

   och sedan bakåt

$$1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 3(37 - 5 \cdot 7) = -3 \cdot 37 + 16 \cdot 7.$$

   Multiplicera igenom med 4 för att få $4 = -12 \cdot 37 + 64 \cdot 7$. Så en lösning till vår Diof. ekv. är $x_0 = -12$, $y_0 = -64$. Den allmänna lösningen blir

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n, \quad y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   Här är $a = 37$, $b = 7$, $d = 1$ så den allmänna lösningen är

$$x = -12 + 7n, \quad y = -64 + 37n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5. (a) Tanken är nog att göra den första med induktion.

   Steg 1: Basfallet $n = 1$. HL $= 1^1 = 1$ och VL $= 2 \cdot 1 - 1 = 1 =$ HL, v.s.v.

   Steg 2: Antag att

$$\sum_{k=1}^{p}(2k-1) = p^2. \tag{1}$$

   Vi vill deducera att

$$\sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = (p+1)^2. \tag{2}$$

   Vi delar upp summan i VL av (2) s.a. (1) kan användas:

$$\sum_{k=1}^{p+1}(2k-1) = \left[\sum_{k=1}^{p}(2k-1)\right] + [2(p+1)-1] = p^2 + (2p+1) = (p+1)^2, \quad \text{v.s.v.}$$

   (b) Tanken är nog att härleda den andra ekvationen från den första. Vi har

$$\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{k=1}^{n}[(2k-1)+1] = \left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right] + \sum_{k=1}^{n} 1 = \\ = n^2 + n = n(n+1), \quad \text{v.s.v.}$$

6. För att F ska vara injektiv så måste både f och g vara injektiva, samt att $f(A) \cap g(C) = \phi$. Eftersom f är surjektiv så är $f(A) = [3, 5]$. Så det sista kravet blir att $g(C) \subseteq [2, 3)$.

7. $2x - 7 \equiv 12 \Leftrightarrow 2x \equiv 19 \Leftrightarrow x \equiv 2^{-1} \cdot 19 \equiv 18 \cdot 19 \equiv 342 \equiv -8 \equiv 27 \pmod{35}$.
   SVAR: $x \equiv 27 \pmod{35}$.

8. Om vi låter c vara hypoteneusen så säger Pythagoras sats att

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{3}$$

   Om både a och b var delbara med 3 så skulle även c vara det, enligt (3), som skulle säga emot att SGD$(a, b, c) = 1$. Om ingen av a och b var delbara med 3 däremot så skulle $a^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \equiv b^2 \pmod 3$, sådan att $a^2 + b^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Men då skulle $c^2 \equiv 2 \pmod 3$, enligt (3), något som är omöjligt, ty varje heltalskvadrat är $0 \vee 1 \pmod 3$.

   Enda möjligheten kvar är att precis ett av a och b är delbart med 3, v.s.v.