Inledande diskret matematik D, HT2014
Lösningar till tentan 2015-08-28

1. En logisk formel sägs vara en *tautologi* om den är sann oavsett sanningsvärdena på de ingående Booleska variablerna. Här har vi tre variabler $p,\ q,\ r$ så det finns totalt 8 möjliga kombinationer av sanningsvärden. Det är lite opraktisk att testa alla möjligheter i varje deluppgift (totalt 32 fall), så vi försöker förenkla arbetet först. Alla fyra formlerna är implikationer, och en implikation är alltid sann då hypotesen är falsk. Så det enda intressanta fallet är då hypotesen är sann. Formeln är alltså en tautologi om och endast om slutsatsen är sann när som helst hypotesen är det eller, ekvivalent, om hypotesen är falsk när som helst slutsatsen är det. Sett omvänt, för att bevisa att en av formlerna inte är en tautologi så räcker det att hita en instans då slutsatsen är falsk trots att hypotesen är sann.

   (a) Ej en tautologi. Om r är sann men både p och q är falska så är hypotesen sann men slutsatsen falsk.

   (b) Ej en tautologi av samma skäl som i del (a).

   (c) En tautologi. Om slutsatsen vore falsk så skulle både p och q vara det. Då skulle hypotesen vara sann om och endast om både r och $\neg r$ var det, som är omöjligt.

   (d) En tautologi. Om hypotesen är sann så måste till att börja med $p \wedge r$ vara sann, så i synnerhet måste p vara sann. Men då är slutsatsen $p \vee q$ sann.

2. Kör Euklides först framåt:

$$45 = 2 \cdot 21 + 3,$$
$$21 = 7 \cdot 3 + 0.$$

   Så SGD$(45,\ 21) = 3$ och $3 \mid 9$ så den Diofantiska ekvationen är lösbar. Euklides bakåt ger direkt

$$3 = 45 - 2 \cdot 21 = 1 \cdot 45 - 2 \cdot 21.$$

   Multiplicera igenom med 3 så får vi

$$9 = 3 \cdot 45 - 6 \cdot 21,$$

   så en lösning till vår Diof. ekv. är $x_0 = 3$, $y_0 = 6$. Den allmänna lösningen ges av

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n, \quad y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   Här är $a = 45$, $b = 21$, $d = 3$ så den allmänna lösningen blir

$$x = 3 + 7n, \quad y = 6 + 15n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Uppgiften är lite tvetydigt formulerat, men jag tolkar "tvåsiffrigt heltal" som ett heltal i mängden $\{10, 11, \ldots, 99\}$. Relationen ges per definition av

$$ab\,\mathcal{R}\,cd \Leftrightarrow a+b=c+d.$$

   Det är klart att detta är en ekvivalensrelation, för (i) $a+b=a+b$, (ii) om $a+b=c+d$ så är även $c+d=a+b$, (iii) om $a+b=c+d$ och $c+d=e+f$ så är även $a+b=e+f$.

   Siffersumman är minst 1 (endast för 10) och högst 18 (endast för 99) och allting däremellan är möjlig. Detta betyder att det finns 18 ekvivalensklasser.

4. Om $f(A\cap B)=\phi$ ska gälla så måste $A\cap B$ redan vara en tom mängd. Så vi vill att $f(A)$ och $f(B)$ ska överlappa trots att A och B inte gör det. Det enklaste exemplet är vilken som helst konstant funktion med en definitionsmängd på mer än ett element. T.ex. $f:\{0,\,1\}\to\{0\}$ given av $f(0)=f(1)=0$. Tag $A=\{0\}$, $B=\{1\}$.

5. Kinesiska Restsatsen säger att den allmäna lösningen är

$$x\equiv 2(7r)+3(17s) \pmod{17\cdot 7}, \tag{1}$$

   där $7r\equiv 1 \pmod{17}$ och $17s\equiv 1 \pmod 7$. Både r och s hittas via Euklides algoritm. Vi kör Euklides först framåt

$$17=2\cdot 7+3, \quad 7=2\cdot 3+1,$$

   och sedan bakåt

$$1=7-2\cdot 3=7-2(17-2\cdot 7)=5\cdot 7-2\cdot 17.$$

   Modulo 17 säger detta att $1\equiv 5\cdot 7$ så vi kan ta $r=5$. Modulo 7 säger den att $1\equiv -2\cdot 17$ så vi kan ta $s=-2$ eller, om man vill ha ett positivt värde, tag $s=-2+7=5$. Insättning in i (1) ger lösningen

$$x\equiv 14\cdot 5+51\cdot 5\equiv 325\equiv 87 \pmod{119}.$$

   SVAR: $x\equiv 87 \pmod{119}$.

6. Det är underförstått att vi räknar mod 31 så vi lämnar ut $[\ldots]$. Vi har

$$15x+2\equiv 7 \Leftrightarrow 15x\equiv 5\equiv x\equiv 15^{-1}\cdot 5.$$

   Notera att inversen finns ty $\mathrm{SGD}(31,\,15)=1$. Inversen kan hittas via Euklides, men det går att upptäcka direkt att $15\cdot 2=30\equiv -1$ så $15^{-1}\equiv -2\equiv 29$. Alltså är lösningen $x\equiv 29\cdot 5\equiv 145\equiv 21 \pmod{31}$.

7. Grafen $K_{4,5}$ består per definition av två grupper av noder, $\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$ och $\{w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4, w_5\}$ med en kant mellan varje par $\{v_i,\ w_j\}$. Enligt multiplikationsprincipen finns det $4 \cdot 5 = 20$ sådana par, så 20 kanter i grafen.

8. Kalla talen för $x,\ x+1,\ x+2,\ x+3$ och notera att $(x+1)(x+2) = x^2+3x+2 = (x^2+3x+1)+1$ medan att $x(x+3) = x^2+3x = (x^2+3x+1)-1$. Så om vi sätter $m := x^2+3x+1$ så har vi att

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = [(x+1)(x+2)][x(x+3)] = (m+1)(m-1) = m^2-1, \quad \text{v.s.v.}$$