MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2009-08-18.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Urban Larsson,
0762 - 721861

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 25 poäng sammanlagt, för 4 krävs 35 poäng och för 5 krävs 45 poäng.

---

1. Bland sju pojkar och fem flickor ska man välja ut sex personer. På hur många sätt kan man göra det om

   (a) man får välja helt fritt.

   (b) det måste vara tre flickor och tre pojkar.

   (c) man får välja helt fritt förutom att man inte får välja både Pelle och Anna (som är bland de tolv personerna).

   Det ska vara explicita svar (d v s inga binomialkoefficienter) och motiveringar för full poäng. (8p)

2. Låt $M = \{2, 3, 4, 5\}$ och $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$ som vanligt de naturliga talen respektive heltalen. Avgör om följande utsagor är sanna eller falska givet att universum är någon av de tre mängderna M, $\mathbb{N}$ respektive $\mathbb{Z}$. Motivera dina svar kortfattat. Det är alltså totalt 9 olika fall att utreda.

   (a) $\forall y \exists x : y \nmid x$

   (b) $\forall z \exists x \exists y : z = x + y$

   (c) $\forall z \exists x \exists y : z > x + y$

   (9p)

3. Vi definierar en relation på alla fyrsiffriga tal (d v s heltalen från och med 1000 till och med 9999) genom att säga att två tal är relaterade om och endast om de har samma siffersumma. t ex är 1237 relaterat till 1552 eftersom siffersummorna är

   $$1 + 2 + 3 + 7 = 13 \text{ respektive } 1 + 5 + 5 + 2 = 13.$$

   (a) Motivera att detta är en ekvivalensrelation.

   (b) Hur många ekvivalensklasser finns det?

   (c) Hur många tal finns det i ekvivalensklassen som innehåller 8978?

   (8p)

Var god vänd!

4. Bestäm alla positiva heltalslösningar $x, y \in \mathbb{Z}_+$ till ekvationen

$$147x + 336y = 2121.$$

(6p)

5. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (3k+1) = n(n+1)^2$$

för alla positiva heltal n. (6p)

6. (a) Primtalsfaktorisera 1615.
   (b) Bestäm det minsta primtal som är större än 1615. Motivera ditt svar noggrant. Tips: $\sqrt{1615} < \sqrt{1681} = 41$. (7p)

7. (a) Visa att om x och m är naturliga tal så gäller att $x+1$ delar $x^{2m+1}+1$. Tips: Betrakta den geometriska summan $\sum_{r=0}^{2m}(-x)^r$.
   (b) Visa att om $2^k + 1$ är ett primtal så är $k = 2^n$ för något heltal n. Tips: Sätt $k = s(2m+1)$ och utnyttja första deluppgiften med $x = 2^s$. (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 7 september. Därefter kan de avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.