MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2014-08-20.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Anna Persson, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Avgör om följande argument är giltiga. Svaren ska motiveras.

(a)
$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \neg(p \wedge q) \\ q \to s \\ \neg r \\ p \to r \\ \hline s \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} p \vee q \\ p \to r \\ q \to (s \vee t) \\ r \to w \\ s \to w \\ t \to w \\ \hline w \end{array}$$

(6p)

2. Låt $G = (V, E)$ vara en graf och låt R, S och T vara relationer på V givna av att

- xRy om x och y är grannar
- xSy om x och y ligger i samma komponent
- xTy om $d_x = d_y$ där d_x är graden av x.

Vilka av relationerna R, S och T är ekvivalensrelationer (oavsett hur G ser ut)? (8p)

3. Vi definierar (som vanligt) Fibonacci-talen enligt följande:
$$\begin{cases} F(1) = 1, \\ F(2) = 1, \\ F(n) = F(n-1) + F(n-2), \text{ om } n \geq 3. \end{cases}$$
Visa att dessa satisfierar likheten
$$F(n)^2 = F(n-1)F(n+1) + (-1)^{n+1},$$
för alla heltal $n \geq 2$. (8p)

4. I den här uppgiften krävs det att man svarar med ett explicit heltal för full poäng.

(a) Hur många positiva sexsiffriga heltal finns det som innehåller exakt 2 tvåor, 2 femmor och 1 fyra?

(b) Hur många av dessa är delbara med 3?

Svaren måste motiveras. (8p)

Var god vänd!

5. Bestäm resten vid division med 21 för 2013^{2014}. (6p)

6. Låt $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vara en bijektiv funktion. Låt följden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara rekursivt definierad genom $a_1 = f(1)$ och då $n \geq 2$, $a_n = f(1 + f^{-1}(a_{n-1}))$. Visa att det för alla positiva heltal n gäller att $a_n = f(n)$. (6p)

7. (a) Visa att om x och m är naturliga tal så gäller att $x+1$ delar $x^{2m+1}+1$.
   Tips: Betrakta den geometriska summan $\sum_{r=0}^{2m}(-x)^r$.

   (b) Visa att om $2^k + 1$ är ett primtal så är $k = 2^n$ för något heltal n.
   Tips: Sätt $k = s(2m+1)$ och utnyttja första deluppgiften med $x = 2^s$. (8p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 10 september. Efter det kan tentorna avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper.

LYCKA TILL! • Stefan.