MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Diskret matematik IT, TMV200, 2014-04-25.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Åse Fahlander, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 20 poäng sammanlagt, för 4 krävs 30 poäng och för 5 krävs 40 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Primtalsfaktorisera $n = 13923$ och beräkna $\Phi(n)$, d v s Eulers phi-funktion av n. (Du måste ange värdet på $\Phi(n)$ som ett heltal för full poäng.) (7p)

2. Klass 9A består av 22 elever. Vi ska välja ut två grupper av elever ur klass 9A på ett sådant sätt att ingen elev ingår i båda grupperna.
   (a) På hur många sätt kan man välja grupperna om det ska finnas 5 elever i en grupp och 3 elever i den andra?
   (b) På hur många sätt kan man välja grupperna om det ska finnas 4 elever i båda grupperna?
   (c) Vilket av antalen i deluppgifterna är störst? Motivera ditt svar.

   Du behöver inte räkna ut eventuella fakulteter som dyker upp. (8p)

3. Visa att
$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$$
   för alla positiva heltal n. (7p)

4. Låt $M = \{2, 3, 4, 5\}$ och $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$ som vanligt de naturliga talen respektive heltalen. Avgör om följande utsagor är sanna eller falska givet att universum är någon av de tre mängderna M, $\mathbb{N}$ respektive $\mathbb{Z}$. Motivera dina svar kortfattat. Det är alltså totalt 9 olika fall att utreda.
   (a) $\forall y \exists x : y \nmid x$
   (b) $\forall z \exists x \exists y : z = x + y$
   (c) $\forall z \exists x \exists y : z > x + y$

   (8p)

Var god vänd!

5. Låt $C = \{\text{cirklar i } \mathbb{R}^2\}$. Vi antar att C även innehåller cirklar med radien 0, dvs. punkter $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Arean av en cirkel är πr^2 där r är radien i cirkeln. Avståndet mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) i $\mathbb{R}^2$ ges enligt Pythagoras sats av

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

   (a) Till ett par av par $((r, s), (p, q)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ associerar vi alla cirklar som har centrum i punkten (r, s) och som går genom punkten (p, q). Motivera noggrannt att detta definierar en funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow C.$$

   (b) Är funktionen f injektiv?

   (c) Är funktionen f surjektiv?

   (d) Definiera $h : C \longrightarrow \mathbb{R}$ som $h(c) =$ arean av c. Ge en explicit formel för den sammansatta funktionen

$$h \circ f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

   Alla svar måste motiveras. (8p)

6. Rita en riktad graf med 4 noder som är svagt sammanhängande och som är sådan att en relation som har den som relationsgraf är transitiv, men varken symmetrisk, antisymmetrisk eller reflexiv. Motivera ditt svar. (6p)

7. Låt p vara ett primtal. I den här uppgiften får du använda följande resultat (utan att bevisa det):

$$x^2 \equiv 1 \pmod p \iff x \equiv 1 \pmod p \text{ eller } x \equiv -1 \pmod p.$$

   Bestäm för $y, z \in \mathbb{Z}$ alla olika värden som

$$y^{(p-1)/2} + z^{(p-1)/2}$$

   kan anta modulo p. (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade senast den 19 maj. Resultatet meddelas via Ladok och tentorna kan efter det avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper.

LYCKA TILL! Stefan.