Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DT2-3

2016-12-21 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 0766377873

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 22 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2016. Preliminärt så krävs 32 poäng för betyget 4 och 42 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 9 januari. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. I uppgift 5 behöver man inte räkna ut svaren som decimaltal.

Uppgifterna

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. (3p)

$$\begin{array}{r} p \to q \\ q \to \neg(r \wedge s) \\ \neg r \to (\neg p) \wedge t \\ t \to s \\ - - - - - - - \\ \neg p \end{array}$$

(b) Ge exempel på predikat $P(x, y)$ och $Q(x, y)$ som illustrerar att följande två utsagor inte är logiskt ekvivalenta. Är det sant att någon av utsagorna implicerar den andra, och i så fall vilken implicerar vilken ? (3p)

$$\forall x\, [\exists y\, P(x, y) \vee \exists y\, Q(x, y)]$$
$$[\forall x\, \exists y\, P(x, y)] \vee [\forall x\, \exists y\, Q(x, y)]$$

2. Bevisa följande formler med induktion. OBS! Det finns i båda fallen alternativa bevis men du får endast poäng för induktionsbevis.

(a) För alla $n \in \mathbb{Z}_+$ gäller $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$. (4p)

(b) För alla $n \in \mathbb{Z}_+$ gäller $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$. (4p)
(OBS! Här får du ta hjälp av produktregeln: $\frac{d}{dx}(uv) = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$).

3. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (5p)

$$1170x + 1001y = 260$$

samt den lösning för vilken $|x| + |y|$ är minst.

(b) För vilka $b \in \mathbb{Z}$ är kongruensen $1170x \equiv b \pmod{1001}$ lösbar ? (1p)

(c) Lös kongruensen för $b = 260$ (TIPS: $13 \cdot 6 = 78$). (2p)

4. (a) Bestäm alla heltal samt det minsta positiva heltalet som uppfyller (4p)

$$x \equiv 1 \pmod{6}, \quad x \equiv 3 \pmod{7}, \quad x \equiv 5 \pmod{11}.$$

(b) Formulera Fermats (lilla) sats. (1p)

(c) Talet a sägs vara en *primitiv rot* modulo primtalet p om vart och ett av talen $1, 2, \ldots, p-1$ är kongruent med någon potens av $a \pmod{p}$. (2p)
Visa att 2 är en primitiv rot modulo 11.

5. På Bullerbyns Tekniska Högskola finns 6 olika civilingenjörsprogram och 10 nya studenter antas varje år. Till HT-2016 antas 10 nya studenter, som vi kallar för $A, B, \ldots, J$. (9p)

(a) På hur många sätt kan studenterna fördelas bland programmen om man ska ta hänsyn till vilka studenter som läser vilka program ?

(b) Hur många möjligheter finns det för fördelningen, om man däremot endast tar hänsyn till antalet studenter på varje program ?

(c) Hur många möjligheter finns det för en fördelning som i (a), där A och B läser olika program ?

(d) Hur många möjligheter finns det för en fördelning som i (a), där endast två program får studenter (dvs exakt två st) ?

(e) Hur många möjligheter finns det för en fördelning som i (b), där inget program får 6 studenter eller fler ?

6. (a) Rita en enkel graf med 7 noder där gradtalen hos noderna är 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5. Numrera sedan noderna i din graf från 1-7, i den ordning du vill, och ange en Eulerväg i grafen. (4p)

(b) Rita upp alla parvis icke-isomorfa grafer med 4 noder (TIPS: De är 11 st till antal). (3p)

7. Bevisa att om x, y, z är heltal som utgör de tre sidolängderna i en rätvinklig triangel, så måste xyz vara en multipel av 60. (5p)

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/DT2-3, 161221

1. (a) Argumentet är ogiltigt. Om $p = q = r = 1$, $s = t = 0$, så blir alla hypoteserna sanna medan slutsatsen blir falsk.

(b) Den andra utsagan implicerar den första. T.ex. om det för varje x finns ett y sådan att $P(x, y)$ gäller (första alternativet i den andra utsagan), då måste det även vara sann a fortiori att det för varje x finns antingen ett y sådan att $P(x, y)$ gäller eller ett y sådan att $Q(x, y)$ gäller, dvs den första utsagan blir sann. Samma argument gäller i fall det för varje x finns ett y sådan att $Q(x, y)$ gäller (dvs andra alternativet i den andra utsagan).

Dock är det falskt i allmänhet att den första utsagan implicerar den andra. Som ett exempel, låt universumet U bestå av heltalen $0, 1, \dots, n$, för något $n > 0$, och låt $P(x, y)$ resp. $Q(x, y)$ vara predikaten $x < y$ resp. $x > y$. Den första utsagan är nu sann ty, givet ett heltal $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ kan vi alltid hitta ett y från samma mängd sådan att antingen $x < y$ eller $x > y$ gäller. Den andra utsagan är dock falsk. Om $x = n$ så finns det inget y sådan att $x < y$, så utsagan $\forall x \, \exists y \, P(x, y)$ är falsk ($x = n$ är ett motexempel). På samma vis, om $x = 0$ så finns det inget y sådan att $x > y$, så utsagan $\forall x \, \exists y \, Q(x, y)$ är falsk ($x = 0$ är ett motexempel).

2. (a) *Steg 1:* Basfallet $n = 1$.

$$\text{VL} = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 = \text{HL, korrekt !}$$

Steg 2: Antag att

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2. \tag{1}$$

Vi vill deducera att

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2. \tag{2}$$

Vi skriver om VL av (2) såhär:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = \left[\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) \right] + [2(n + 1) - 1] \overset{(1)}{=} n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2, \quad \text{v.s.v.}$$

(b) *Steg 1:* Basfallet $n = 1$.

$$\text{VL} = \frac{d}{dx}(x) = 1 = 1 \cdot 1^{1-1} = \text{HL, korrekt !}$$

Steg 2: Antag att

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}. \tag{3}$$

Vi vill deducera att

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = (n + 1)x^n. \tag{4}$$

Med hjälp av produktregeln kan vi skriva om VL av (4) såhär:

$$\frac{d}{dx}(x^{n+1}) = \frac{d}{dx}(x^n \cdot x) = x^n \frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(x^n) =$$
$$\overset{(3)}{=} x^n \cdot 1 + x \cdot (nx^{n-1}) = x^n + nx^n = (n+1)x^n, \quad \text{v.s.v.}$$

3. (a) Vi kör Euklides algoritm på (1170, 1001). Först framåt

$$\begin{aligned} 1170 &= 1 \cdot 1001 + 169, \\ 1001 &= 5 \cdot 169 + 156, \\ 169 &= 1 \cdot 156 + 13, \\ 156 &= 12 \cdot 13 + 0, \end{aligned}$$

sedan bakåt

$$\begin{aligned} 13 &= 169 - 156 \\ &= 169 - (1001 - 5 \cdot 169) \\ &= 6 \cdot 169 - 1001 \\ &= 6(1170 - 1001) - 1001 \\ &= 6 \cdot 1170 - 7 \cdot 1001. \end{aligned}$$

Multiplicera igenom med 20 så har vi $260 = 120 \cdot 1170 - 140 \cdot 1001$, som ger lösningen $(x_0,\, y_0) = (120,\, -140)$. Den allmänna lösningen lyder

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n, \\ y &= y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Här är $a = 1170$, $b = 1001$, $d = 13$ så den allmänna lösningen är

$$x = 120 + 77n, \quad y = -140 - 90n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Man kan sedan kontrollera att $|x| + |y|$ minimeras då $n = -2$, dvs då $(x,\, y) = (-34,\, 40)$.

(b) Som vi har sett i del (a), $\mathrm{SGD}(1170,\, 1001) = 13$ så kongruensen är lösbar då b är en multipel av 13.

(c) Vi delar igenom med 13 och får den ekvivalenta kongruensen $90x \equiv 20 \pmod{77}$, som i sin tur är samma sak som $13x \equiv 20 \pmod{77}$. Så $x \equiv 13^{-1} \cdot 20 \pmod{77}$. Från tipset ser vi att $13^{-1} \equiv 6 \pmod{77}$. Så $x \equiv 6 \cdot 20 = 120 \equiv 43 \pmod{77}$.

Svar: $x \equiv 43 \pmod{77}$.

4. (a) Den allmänna lösningen är

$$x \equiv 1 \cdot b_1 \cdot 7 \cdot 11 + 3 \cdot b_2 \cdot 6 \cdot 11 + 5 \cdot b_3 \cdot 6 \cdot 7 \pmod{6 \cdot 7 \cdot 11}, \tag{5}$$

där

$$\begin{aligned} 7 \cdot 11 \cdot b_1 \equiv 1 \pmod 6 &\Rightarrow -b_1 \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow \text{tag } b_1 = -1, \\ 6 \cdot 11 \cdot b_2 \equiv 1 \pmod 7 &\Rightarrow 3b_2 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow \text{tag } b_2 = 5, \\ 6 \cdot 7 \cdot b_3 \equiv 1 \pmod{11} &\Rightarrow 9b_3 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow \text{tag } b_3 = 5. \end{aligned}$$

Insättning in i (5) ger

$$\begin{aligned} x &\equiv (-1)\cdot 1\cdot 7\cdot 11 + 3\cdot 5\cdot 6\cdot 11 + 5\cdot 5\cdot 6\cdot 7 \pmod{462} \equiv \\ &\equiv -77 + 990 + 1050 \equiv 1963 \equiv 115 \pmod{462}. \end{aligned}$$

Det minsta positiva talet som uppfyller detta är naturligtvis $x = 115$.

(b) Om p är ett primtal och a är ett heltal som inte är en multipel av p, då gäller att $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

(c) Vi räknar i tur och ordning modulo 11:

$$\begin{gathered} 2^1 \equiv 2,\ \ 2^2 \equiv 4,\ \ 2^3 \equiv 8,\ \ 2^4 = 16 \equiv 5,\ \ 2^5 = 2^4\cdot 2 \equiv 5\cdot 2 \equiv 10, \\ 2^6 = 2^5\cdot 2 \equiv (-1)\cdot 2 \equiv 9,\ \ 2^7 = 2^5\cdot 2^2 \equiv (-1)\cdot 4 \equiv 7,\ \ 2^8 = 2^5\cdot 2^3 \equiv (-1)\cdot 8 \equiv 3, \\ 2^9 = 2^5\cdot 2^4 \equiv (-1)\cdot 5 \equiv 6,\ \ 2^{10} \equiv 1 \text{ (enligt Fermat)}. \end{gathered}$$

Så vi ser att vart och ett av talen 1, 2, ..., 10 är kongruent (mod 11) med en av potenserna 2^k, $k = 1, 2, \ldots, 10$.

5. (a) Varje student har 6 val så det finns 6^{10} möjligheter.

(b) Låt $x_1, \ldots, x_6$ vara antalet studenter på de olika programmen. Så $x_1 + \cdots + x_6 = 10$ och $x_i \in \mathbb{N}$. Antalet möjligheter är således $\binom{10+6-1}{6-1} = \binom{15}{5}$.

(c) Vi räknar bort från svaret till (a) antalet möjligheter där A och B läser samma program. För den senare beräkningen kan vi betrakta paret A, B som "en student" så vi har bara 9 studenter att fördela bland 6 program. Detta kan göras på 6^9 sätt. Så svaret på (c) är $6^{10} - 6^9$.

(d) Det finns $\binom{6}{2} = 15$ sätt att först välja de två programmen som ska få studenter. Sedan finns det för varje student två val av program, som ger 2^{10} möjliga fördelningar. Vi måste dock räkna bort de två utfallen där alla 10 studenterna hamnar i ett och samma program. M.a.o. finns det $2^{10} - 2$ giltiga utfall, givet de två programmen. Därmed finns det totalt $15\cdot(2^{10} - 2)$ möjligheter.

(e) Notera att högst ett program kan få 6 eller fler studenter, ty vi har mindre än 12 studenter totalt. Vi räknar bort från svaret till (b) de dåliga utfallen. Det finns 6 val av det program som ska få 6 eller fler studenter. Detta program kan i sin tur få $6, 7, 8, 9$ eller 10 studenter. I de respektive fallen ska sedan de återstående $4, 3, 2, 1$ eller 0 studenterna fördelas bland de återstående 5 programmen. Antalet sätt att göra den fördelningen räknas på samma sätt som i (b). Lägger vi ihop allting och använder additionsprincipen så ser vi att svaret på (e) är

$$\begin{aligned} &\binom{15}{5} - 6\cdot\left[\binom{4+5-1}{5-1} + \binom{3+5-1}{5-1} + \binom{2+5-1}{5-1} + \binom{1+5-1}{5-1} + \binom{0+5-1}{5-1}\right] = \\ &= \binom{15}{5} - 6\cdot\left[\binom{8}{4} + \binom{7}{3} + \binom{6}{2} + \binom{5}{1} + \binom{4}{0}\right] = \\ &= \text{ (om man vill) } = 3003 - 6(70 + 35 + 15 + 5 + 1) = 3003 - 756 = 2247. \end{aligned}$$

6. (a) Se Figure L.1 för ett exempel på en sådan graf. Ett exempel på en Eulerväg från nod 1 till nod 4 i min graf är

$$1 \to 2 \to 4 \to 1 \to 7 \to 2 \to 5 \to 3 \to 6 \to 1 \to 3 \to 4.$$

(b) Se Figur L.2.

7. Eftersom $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ så räcker det, enligt Aritmetikens Fundamentalsats, att bevisa att xyz är delbart med vart och ett av 4, 3 och 5. Väsentligt för beviset är det faktum att $z^2 = x^2 + y^2$, enligt Pythagoras, om vi antar att z är hypoteneusens längd.

Delbarhet med 4: Om t är ett udda tal så är $t^2 \equiv 1 \pmod 4$ medan att om t är jämnt så är $t^2 \equiv 0 \pmod 4$. Så om både x och y var udda så skulle $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$ gälla, något som är omöjligt. Så minst ett av x och y måste vara jämnt. Om båda var jämna så skulle redan xy vara delbart med 4 och således också xyz. Så vi kan anta att x är jämnt och y udda, något som innebär att också z blir udda. Det återstår i detta fall att bevisa att x är faktiskt en multipel av 4. Men $x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$. Eftersom både y och z är udda så är både $z - y$ och $z + y$ jämna samt, och detta är det viktiga, exakt ett av dem måste vara delbart med 4. Således är $(z - y)(z + y)$ delbart med 8 och därmed också x^2. Om nu x inte var delbart med 4 så skulle $x = 2t$ gälla, för något udda t. Då skulle $x^2 = 4t^2$ vara delbart med 4 men inte med 8. Så x måste vara delbart med 4, v.s.v.

Delbarhet med 3*:* Om inte t är delbart med 3 så är $t^2 \equiv 1 \pmod 3$ medan att om t är en multipel av 3 så är $t^2 \equiv 0 \pmod 3$. Så om varken x eller y var delbara med 3 så skulle $z^2 = x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$ gälla, något som är omöjligt. Så minst ett av x och y måste vara delbart med 3 och därmed blir också xyz automatiskt delbart med 3.

Delbarhet med 5*:* Om inte t är delbart med 5 så är $t^2 \equiv \pm 1 \equiv 1 \vee 4 \pmod 5$ medan att om t är en multipel av 5 så är $t^2 \equiv 0 \pmod 5$. Så varje heltalskvadrat är kongruent med 0, 1 eller 4 (mod 5). Om varken x eller y var delbara med 5 så skulle $z^2 = x^2 + y^2 \equiv \pm 1 \pm 1 \equiv 2 \vee 0 \vee 3 \pmod 5$ gälla. Den enda giltiga möjligheten är i så fall att $z^2 \equiv 0 \pmod 5$, dvs att z^2 är delbart med 5. Eftersom 5 är ett primtal så skulle detta medföra i sin tur att även z var delbart med 5. Slutsatsen är att minst ett av x, y och z *måste* vara delbart med 5, och således blir också xyz det.