Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DT2-3

2016-10-22 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Linnea Hietala, telefon: Ankn. 5325

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 22 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2015. Preliminärt så krävs 32 poäng för betyget 4 och 42 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 14 november. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. I uppgift 5 behöver man inte räkna ut svaren som decimaltal.

Uppgifterna

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. (3p)

$$\begin{array}{r} r \vee s \\ (u \vee s) \to t \\ s \to (r \vee \neg t) \\ r \to u \\ \hline u \end{array}$$

(b) Skriv följande argument i symbolisk logisk form. Se till att definiera all notation tydligt ! Är argumentet giltigt ? (3p)

En välförberedd student kommer alltid att klara sina tentor
Somliga studenter förbereder sig bra inför tentor
– –
Somliga studenter klarar *inte* sina tentor

2. Låt $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden som definieras rekursivt av

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} \;\; \forall\, n \geq 2.$$

(a) Beräkna a_3. (2p)

(b) Bevisa att $a_n < 4^n$ för alla $n \geq 1$. (5p)

Var god vänd!

3. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (5p)

$$25x - 14y = 20$$

samt den lösning för vilken $|x| + |y|$ är minst.

(b) Med hjälp av del (a), lös kongruensen $28x \equiv 6 \pmod{50}$. (3p)

4. (a) Bestäm det minsta positiva heltalet x som uppfyller (4p)

$$x \equiv 4 \pmod 5, \quad x \equiv 3 \pmod 6, \quad x \equiv 1 \pmod 7.$$

(b) Förklara varför systemet saknar lösning om vi byter ut den tredje kongruensen mot $x \equiv 1 \pmod 9$. (2p)

5. En opinionsundersökning gjordes bland 20 datastudenter för att se vem de hade röstat på i det amerikanska presidentvalet om alternativen var: Hillary Clinton, Donald Trump och Hacke Hackspett. (8p)

(a) Hur många möjligheter finns det för resultatet om omröstningen är öppen, dvs man ska ta hänsyn till vem som röstar på vem ?

(b) Hur många möjligheter finns det för resultatet om omröstningen är sluten, dvs man tar hänsyn endast till antalet röster för varje kandidat ?

(c) Hur många möjligheter finns det för resultatet i en öppen omröstning där Hillary, Donald och Hacke får 4, 3 resp. 13 röster ?

(d) Om omröstningen är öppen och alla röster helt slumpmässigt, vad är sannolikheten att Hacke får minst 17 röster ?

6. (a) Rita en enkel graf med 8 noder där gradtalen hos noderna är 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6. (3p)

(b) För din graf i del (a), numrera noderna från 1-8, i den ordning du vill. Sedan ange (2p)

i. en Eulerväg i din graf

ii. grafens grannmatris.

(c) Är de två graferna i den bifogade Figur 1 isomorfa eller ej ? Motivera ditt svar ! (2p)

7. (a) Bestäm $3^{79} \pmod{200}$. (3p)

(b) Du är givet ett enormt stort heltal n. Säg att du råkar komma över värdet av $\Phi(n)$ samt vet att n är en produkt av två olika primtal. Visa hur du skulle kunna snabbt bestämma dessa två primtal genom att ställa upp en kvadratisk ekvation som de är lösningarna till. (5p)

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/DT2-3, 161022

1. (a) Argumentet är giltigt. Antag att slutsatsen u är falsk men alla hypoteserna sanna. Då måste r vara falsk enligt H4, som i sin tur innebär att s är sann enligt H1. Men då måste både t och $r \vee \neg t$ vara sanna enligt H2 resp. H3. Men detta säger emot att r är falsk.

(b) Låt universumet U bestå av alla studenter och definiera följande två predikat:

$V(x)$: x är en student som är välförberedd inför sina tentor
$K(x)$: x är en student som klarar sina tentor.

Då lyder argumentet:

$$\begin{array}{r} \forall\, x \;\; V(x) \to K(x) \\ \exists\, x \;\; V(x) \\ \hline \exists\, x \;\; \neg K(x) \end{array}$$

Argumentet är ogiltigt för det är möjligt att *alla* studenter uppfyller $V(x)$, och då skulle alla uppfylla $K(x)$ också.

2. (a) Vi beräknar i tur och ordning

$$a_2 = 3a_1 + 4a_0 = 3(3) + 4(1) = 13,$$
$$a_3 = 3a_2 + 4a_1 = 3(13) + 4(3) = 51.$$

(b) Vi för ett starkt induktionsbevis.
Steg 1: Basfallen $n = 1, 2$. Vi kontrollerar i tur och ordning att

$$3 = a_1 < 4^1 = 4, \quad \text{korrekt,}$$
$$13 = a_2 < 4^2 = 16, \quad \text{korrekt.}$$

Steg 2: Antag att $a_p < 4^p$ för alla $1 \leq p \leq n$, där $n \geq 2$. Vi vill deducera att $a_{n+1} < 4^{n+1}$. Enligt rekursionsformeln och induktionsypotesen har vi att

$$a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1} < 3 \cdot 4^n + 4 \cdot 4^{n-1} = 3 \cdot 4^n + 4^n = 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}, \quad \text{v.s.v.}$$

3. (a) Vi kör Euklides algoritm på (25, 14). Först framåt

$$\begin{aligned} 25 &= 1 \cdot 14 + 11, \\ 14 &= 1 \cdot 11 + 3, \\ 11 &= 3 \cdot 3 + 2, \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1, \end{aligned}$$

sedan bakåt

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \\ &= 3 - (11 - 3 \cdot 3) \\ &= 4 \cdot 3 - 11 \\ &= 4(14 - 11) - 11 \\ &= 4 \cdot 14 - 5 \cdot 11 \\ &= 4 \cdot 14 - 5 \cdot (25 - 14) \\ &= 9 \cdot 14 - 5 \cdot 25. \end{aligned}$$

Multiplicera igenom med 20 så har vi $20 = 180 \cdot 14 - 100 \cdot 25$, som ger lösningen $(x_0, y_0) = (-100, -180)$. Den allmänna lösningen lyder

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n,$$
$$y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Här är $a = 25$, $b = 14$, $d = 1$ så den allmänna lösningen är

$$x = -100 + 14n, \quad y = -180 + 25n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Man kan sedan kontrollera att $|x| + |y|$ minimeras då $n = 7$, dvs då $(x, y) = (-2, -5)$.

(b) SGD(28, 50) = 2, och $2 \mid 6$ så kongruensen är lösbar. Vi delar igenom med 2 och får den ekvivalenta kongruensen $14x \equiv 3 \pmod{25}$. Nu är SGD(14, 25) = 1 så $x \equiv 14^{-1} \cdot 3 \pmod{25}$. Men i del (a) fick vi fram ekvationen $1 = 9 \cdot 14 - 5 \cdot 25$, som innebär att $14^{-1} \equiv 9 \pmod{25}$. Så $x \equiv 9 \cdot 3 = 27 \equiv 2 \pmod{25}$. Modulo 50 har vi sedan två lösningar, nämligen 2 eller 2 + 25: slutligen

$$x \equiv 2 \vee 27 \pmod{50}.$$

4. (a) Den allmänna lösningen är

$$x \equiv 4 \cdot b_1 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot b_2 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot b_3 \cdot 5 \cdot 6 \pmod{5 \cdot 6 \cdot 7}, \tag{1}$$

där

$$\begin{aligned} 6 \cdot 7 \cdot b_1 \equiv 1 \pmod 5 &\Rightarrow 2b_1 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow \text{tag } b_1 = 3, \\ 5 \cdot 7 \cdot b_2 \equiv 1 \pmod 6 &\Rightarrow -b_2 \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow \text{tag } b_2 = -1, \\ 5 \cdot 6 \cdot b_3 \equiv 1 \pmod 7 &\Rightarrow 2b_3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow \text{tag } b_3 = 4. \end{aligned}$$

Insättning in i (1) ger

$$\begin{aligned} x &\equiv 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \pmod{210} \equiv \\ &\equiv 504 - 105 + 120 \equiv 519 \equiv 99 \pmod{210}. \end{aligned}$$

Det minsta positiva talet som uppfyller detta är naturligtvis $x = 99$.

(b) I så fall skulle den tredje kongruensen innebära i synnerhet att $x \equiv 1 \pmod 3$, medan att den andra kongruensen medför att $x \equiv 0 \pmod 3$.

5. (a) Varje student har 3 val så det finns 3^{20} möjligheter.

(b) Låt x_1, x_2, x_3 vara antalet röster för Clinton, Trump resp. Hackspett. Så $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ och $x_i \in \mathbb{N}$. Antalet möjligheter är således $\binom{20+3-1}{3-1} = \binom{22}{2} = 231$.

(c) Det är samma sak som antalet sätt att bilda ett ord från 20 bokstäver, av vilka 13 st är H, 4 st är C och 3 st är T. Antalet möjliga ord är $\frac{20!}{4!\,3!\,13!}$.

(d) Det finns t.ex. $\binom{20}{3} \times 2^3$ möjliga utfall där Hacke får 17 röster, för det finns $\binom{20}{3}$ sätt att välja de tre personer som röster emot Hacke, och var och en av dem kan ha röstat på 2 olika sätt. Likadant gäller om Hacke får 18, 19 resp. 20 röster. Från additionsprincipen och del (a) härleder vi att sannolikheten för att Hacke får minst 17 röster är

$$\frac{\binom{20}{3} \times 2^3 + \binom{20}{2} \times 2^2 + 20 \times 2 + 1}{3^{20}}.$$

6. (a) Se Figure L.1 för ett exempel på en sådan graf.

(b) Ett exmpel på en Eulerväg från nod 3 till nod 6 i min graf är

$$3 \to 4 \to 2 \to 8 \to 1 \to 2 \to 7 \to 1 \to 6 \to 2 \to 5 \to 3 \to 6 \to 4 \to 1 \to 5 \to 6.$$

Min grafs grannmatris är

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Graferna är ej isomorfa. T.ex. den översta grafen har cykler av längd 3, medan att den kortaste cykeln i den nedersta grafen har längd 4.

7. (a) $\Phi(200) = \Phi(2^3 \cdot 5^2) = (2^3 - 2^2)(5^2 - 5^1) = 4 \cdot 20 = 80$. Så $3^{79} \equiv 3^{80} \cdot 3^{-1} \equiv 3^{-1} \equiv 67 \pmod{200}$.

(b) Kalla de två primtalen för p och q. Vi har

$$n = pq \tag{2}$$

samt

$$\Phi(n) = (p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = n - p - q + 1.$$

Från (2) kan vi sätta $q = n/p$ så

$$\Phi(n) = n - p - \frac{n}{p} + 1.$$

Multiplicera igenom med p och fyllta alla termer till vänster så får vi

$$p^2 - (n - \Phi(n) + 1)p + n = 0.$$

Detta kan betraktas som en kvadratisk ekvation för p och q (som måste ju vara den andra roten) eftersom både n och $\Phi(n)$ är kända. Vi har alltså att

$$p,\, q = \frac{(n - \Phi(n) + 1) \pm \sqrt{(n - \Phi(n) + 1)^2 - 4n}}{2}.$$