Inledande diskret matematik D, HT2015
Extra demouppgift 8/10

Låt Q_n vara grafen vars noder är alla binära strängar av längd n och där en kant sätts mellan två noder om motsvarande strängar skiljer sig i exakt en position. Q_n kallas för den *n-dimensionella hyperkuben*.

1. Rita upp Q_1, Q_2 och Q_3 på ett sådant sätt som förklarar namnen.
2. Är Q_3 en planär graf ?
3. För vilka n har Q_n en Eulercykel ?
4. Bevisa att Q_n har en Hamiltoncykel för alla $n \geq 2$.

Lösningar:

1. Se bilden på nästa sida.
2. Ja, det är den. Se bilden på nästa sida.
3. Q_n är en reguljär graf av grad n, dvs varje nod har grad n, för det finns n bitar i en sträng som kan bytas från 0 till 1 eller vice versa. Således har Q_n en Eulercykel om och endast om n är jämnt.
4. Induktion på n. För $n = 2$ har vi t.ex. Hamiltoncykeln

$$00 \to 01 \to 11 \to 10 \to 00.$$

Antag att

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{2^n} \to v_1 \tag{1}$$

är en Hamiltoncykel i Q_n. En nod i Q_{n+1} kan betecknas som antingen $0v$ eller $1v$, där $v \in Q_n$. M.a.o. första biten är noll eller ett och resten av bitarna utgör en nod i Q_n. Följande blir nu en Hamiltoncykel i Q_{n+1}, där pilarna i första raden syftar på vägen i (1) ovan och i andra raden på samma väg fast baklänges:

$$\begin{aligned} 0v_1 \to 0v_2 \to \cdots \to 0v_{2^n} \to \\ \to 1v_{2^n} \to 1v_{2^n-1} \to \cdots \to 1v_2 \to 1v_1 \to 0v_1. \end{aligned}$$