

Inledande diskret matematik D/DI, HT2016
Extra demouppgifter 6/10

1. Hur många heltalslösningar finns det till ekvationen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 11$$

- (a) om $x_i \geq 0$ för alla i ?
 - (b) om $x_i \geq 1$ för alla i ?
 - (c) om $x_i \geq -1$ för alla i ?
 - (d) om $0 \leq x_i \leq 5$ för alla i ?
2. Bestäm koefficienten av $x^3 y^5 z^6 w^3$ i utvecklingen av $(2x - y + z - 3w)^{17}$.

Lösningar:

1. (a) Uppgiften är att placera 11 identiska bollar i 7 åtskiljbara lådor, så antalet lösningar är $\binom{11+7-1}{11} = \binom{17}{6}$.
- (b) Låt $y_i := x_i - 1$. Då är $y_i \geq 0$ och $\sum_{i=1}^7 y_i = 4$. Så det är som i del (a) fast nu ska bara 4 bollar placeras. Så antalet lösningar är $\binom{4+7-1}{4} = \binom{10}{4}$.
- (c) Låt $z_i := x_i + 1$ så $z_i \geq 0$ och $\sum_{i=1}^7 z_i = 18$. Så det är som förut fast med 18 bollar. Svaret är $\binom{18+7-1}{18} = \binom{24}{6}$.
- (d) Vi tar svaret från del (a) och räknar bort de lösningar som motsätter villkoret, dvs de lösningar där något $x_i \geq 6$. Notera att det kan finnas högst ett sådant i , och det finns 7 val för vilket. Vi har 6 olika fall.

FALL 1: Något $x_i = 6$. Det finns 7 möjliga i . Antag att det är x_1 . Då är $\sum_{i=2}^7 x_i = 5$ och antalet lösningar till detta är antalet sätt att placera ut 5 bollar i 6 lådor, alltså $\binom{5+6-1}{5} = \binom{10}{5}$. Så antalet lösningar i Fall 1 är $7 \times \binom{10}{5}$.

FALL 2: Något $x_i = 7$. Då har vi 4 bollar kvar i stället så antalet lösningar blir i stället $7 \times \binom{4+6-1}{4} = 7 \times \binom{9}{4}$.

Fall 3-6, där något x_i är 8, 9, 10 resp. 11, behandlas likadant. När vi lägger ihop från alla sex fallen får vi det totala antalet lösningar som ska räknas bort från svaret i del (a). Så svaret här blir

$$\binom{17}{6} - 7 \times \left[\binom{10}{5} + \binom{9}{4} + \binom{8}{3} + \binom{7}{2} + \binom{6}{1} + \binom{5}{0} \right].$$

2. Antalet sätt att plocka ur de 17 paranteserna 3 st x , 5 st y , 6 st z och 3 st w är $\frac{17!}{3!5!6!3!}$. Så efter ihopsamling av termer kommer vi att få termen

$$\frac{17!}{3!5!6!3!}(2x)^3(-y)^5z^6(-3w)^3 = \frac{17!}{3!5!6!3!}2^3(-1)^5(-1)^33^3x^3y^5z^6w^3.$$

SVAR: $6^3 \times \frac{17!}{3!5!6!3!}$.