# Tentamen
# TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

### 2018-08-31 kl. 14.00–18.00

**Examinator:** Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

**Telefonvakt:** Helga Kristin Olafsdottir, telefon: 5325 (alt. Peter Hegarty 070-5705475)

**Hjälpmedel:** Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 21 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2017. Preliminärt så krävs 31 poäng för betyget 4 och 41 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 21 september. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

---

## OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.
I uppgifter 1, 5, 7, 8 så är deluppgifterna (a) och (b) helt oberoende av varandra och kan därmed lösas separat.

## Uppgifterna

**1.** (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. Motivera väl ! (3p)

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \neg(p \wedge r) \\ s \to q \\ \neg(r \vee s) \to \neg p \\ - - - - - - - - - \\ q \end{array}$$

(b) Låt $U = \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ och $P(x, y, z) : U^3 \to \{\text{sant, falskt}\}$ vara predikatet

$$P(x, y, z) : \quad xy \mid z.$$

Avgör om följande påståendena är sanna eller falska. Motivera väl ! (3p)

$$\begin{array}{l} \forall x \, \exists y \, \exists z \;\; P(x, y, z) \\ \exists x \, \forall y \, \forall z \;\; P(x, y, z) \\ \forall x \, \forall y \, \exists z \;\; P(x, y, z) \\ \exists x \, \exists y \, \forall z \;\; P(x, y, z) \end{array}$$

**Var god vänd!**

**2**. Låt $X = \mathbb{Z}_+$, $Y = \{A \subseteq X : A \text{ är ändlig och } |A| \text{ är ett jämnt tal}\}$.

Låt $\mathcal{R}$ vara följande relation på $Y$: (3p)

$$\mathcal{R} = \{(A,\, B) \in Y^2 : |A \cap B| \text{ är ett jämnt tal}\}.$$

Vilken/vilka av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet har $\mathcal{R}$ ?

- I fall du hävdar att en egenskap gäller, motivera väl !

- Annars, ge ett specifikt motexempel.

**3**. Bestäm med bevis för vilka $n \in \mathbb{N} = \{0,\, 1,\, \ldots\}$ gäller (5p)

$$2^n > 1 + n + \frac{n^2}{2}.$$

(TIPS: Induktion).

**4**. (a) Bestäm $\Phi(273)$, $\Phi(756)$ samt SGD(756, 273). (2p)

(b) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (5p)

$$756x + 273y = 12600,$$

samt alla lösningarna för vilka $|x| + |y| < 100$ gäller.

**5**. (a) Bestäm den allmänna lösningen samt den minsta positiva lösningen till följande system av kongruenser: (4p)

$$3x \equiv 1 \pmod 5, \quad 4x \equiv 2 \pmod 7, \quad 5x \equiv 3 \pmod 8.$$

(b) Bestäm alla positiva heltal $n \in \mathbb{Z}_+$ för vilka $31^n \equiv 1 \pmod{13}$ gäller. Motivera väl ! (3p)

**6**. Under perioden $12-31$ juli i år (20 dagar) uppmättes varje dygn i Göteborg en medeltemperatur, avrundad till närmaste heltal, mellan $18-24$ grader (7 möjliga värden per dygn alltså)[1]. Hur många möjligheter finns det för

(a) den fullständiga temperaturserien, dvs sekvensen av de 20 uppmätta medelvärdena ? (1.5p)

(b) den oordnade temperaturserien, där vi bara bryr oss om antalet gånger varje värde uppmättes och inte exakt vilka dagar ? (1.5p)

(c) den fullständiga serien om vi vet att de enda uppmätta värdena var 19, 20 och 23 grader, och att dessa uppmättes 5, 6 resp. 9 gånger ? (1.5p)

(d) den fullständiga serien om vi vet att det fanns högst 2 dagar där medeltemp. var 22 grader eller högre ? (2p)

(e) Säg att en serie i (a) väljs på måfå. Vilka av följande två händelser har störst sannolikhet ? Motivera väl ! (1.5p)

HÄNDELSE 1: Medelvärdet för hela serien är minst 21 grader.

HÄNDELSE 2: Serien innehåller inga 24:or.

OBS! I deluppgifter (a)-(d) behöver man *inte* ge svaren som explicita bas-10 tal.

**Var god gå till nästa blad!**

[1]Detta är påhittad *fake news*, även om det kanske inte är så långt ifrån sanningen.

**7.** (a) För grafen $G_1$ i Figur 1,

i. Ange en Hamiltoncykel i grafen. (1p)

ii. Lägg till en kant så att den nya grafen har en Eulerväg och ange en sådan väg i den nya grafen. (2.5p)

(b) Låt $G_2$ vara en 4-cykel med numrerade noder, se Figur 2.

i. Skriv upp grannmatrisen $M$ för grafen. (1p)

ii. Utan att utföra någon matrismultiplikation, bestäm de stjärnmärkta elementen i matriserna nedan: (2.5p)

$$M^4 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \qquad M^{16} = \begin{bmatrix} \cdot & * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

**8.** (a) Låt $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden som definieras av följande information: (2p)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_3 = 3, \qquad a_{n+3} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} \; \forall\, n \geq 0.$$

Bestäm $a_{2018}$. Ingen motivering behövs !

(b) För positiva heltal $n$, $k \in \mathbb{Z}_+$ låt $p(n, k)$ vara antalet sätt att skriva $n$ som en summa av $k$ st positiva heltal, utan hänsyn till ordning. (5p)

Exempel: $p(7, 3) = 4$ ty det finns följande skrivsätt

$$7 = 5 + 1 + 1 = 4 + 2 + 1 = 3 + 3 + 1 = 3 + 2 + 2.$$

Bevisa att

$$p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k). \tag{1}$$

(Obs! Man måste sätta $p(\cdot, \cdot) = 0$ så snart minst en av variablerna är mindre än eller lika med noll för att (1) ska alltid make:a sense. Den teknikaliteten behöver du inte grubbla över i ditt bevis.)

**Lycka till!**