

# Tentamen

## TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2018-08-31 kl. 14.00–18.00

**Examinator:** Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

**Telefonvakt:** Helga Kristin Olafsdottir, telefon: 5325 (alt. Peter Hegarty 070-5705475)

**Hjälpmedel:** Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 21 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2017. Preliminärt så krävs 31 poäng för betyget 4 och 41 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 21 september. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

---

### OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

I uppgifter 1, 5, 7, 8 så är deluppgifterna (a) och (b) helt oberoende av varandra och kan därmed lösas separat.

### Uppgifterna

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. Motivera väl ! (3p)

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \neg(p \wedge r) \\ s \rightarrow q \\ \neg(r \vee s) \rightarrow \neg p \\ \hline q \end{array}$$

- (b) Låt  $U = \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \dots\}$  och  $P(x, y, z) : U^3 \rightarrow \{\text{sant, falskt}\}$  vara predikatet

$$P(x, y, z) : xy \mid z.$$

- Avgör om följande påståendena är sanna eller falska. Motivera väl ! (3p)

$$\begin{array}{l} \forall x \exists y \exists z P(x, y, z) \\ \exists x \forall y \forall z P(x, y, z) \\ \forall x \forall y \exists z P(x, y, z) \\ \exists x \exists y \forall z P(x, y, z) \end{array}$$

Var god vänd!

2. Låt  $X = \mathbb{Z}_+$ ,  $Y = \{A \subseteq X : A \text{ är ändlig och } |A| \text{ är ett jämnt tal}\}$ .

Låt  $\mathcal{R}$  vara följande relation på  $Y$ :

(3p)

$$\mathcal{R} = \{(A, B) \in Y^2 : |A \cap B| \text{ är ett jämnt tal}\}.$$

Vilken/vilka av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet har  $\mathcal{R}$  ?

- I fall du hävdar att en egenskap gäller, motivera väl !
- Annars, ge ett specifikt motexempel.

3. Bestäm med bevis för vilka  $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$  gäller

(5p)

$$2^n > 1 + n + \frac{n^2}{2}.$$

(TIPS: Induktion).

4. (a) Bestäm  $\Phi(273)$ ,  $\Phi(756)$  samt  $\text{SGD}(756, 273)$ .

(2p)

- (b) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen

(5p)

$$756x + 273y = 12600,$$

samt alla lösningarna för vilka  $|x| + |y| < 100$  gäller.

5. (a) Bestäm den allmänna lösningen samt den minsta positiva lösningen till följande system av kongruenser:

(4p)

$$3x \equiv 1 \pmod{5}, \quad 4x \equiv 2 \pmod{7}, \quad 5x \equiv 3 \pmod{8}.$$

- (b) Bestäm alla positiva heltal  $n \in \mathbb{Z}_+$  för vilka  $31^n \equiv 1 \pmod{13}$  gäller. Motivera väl !

(3p)

6. Under perioden 12 – 31 juli i år (20 dagar) uppmättes varje dygn i Göteborg en medeltemperatur, avrundad till närmaste heltal, mellan 18 – 24 grader (7 möjliga värden per dygn alltså)<sup>1</sup>. Hur många möjligheter finns det för

- (a) den fullständiga temperaturserien, dvs sekvensen av de 20 uppmätta medelvärdena ?

(1.5p)

- (b) den oordnade temperaturserien, där vi bara bryr oss om antalet gånger varje värde uppmättes och inte exakt vilka dagar ?

(1.5p)

- (c) den fullständiga serien om vi vet att de enda uppmätta värdena var 19, 20 och 23 grader, och att dessa uppmättes 5, 6 resp. 9 gånger ?

(1.5p)

- (d) den fullständiga serien om vi vet att det fanns högst 2 dagar där medeltemp. var 22 grader eller högre ?

(2p)

- (e) Säg att en serie i (a) väljs på måfå. Vilka av följande två händelser har störst sannolikhet ? Motivera väl !

(1.5p)

HÄNDELSE 1: Medelvärdet för hela serien är minst 21 grader.

HÄNDELSE 2: Serien innehåller inga 24:or.

OBS! I deluppgifter (a)-(d) behöver man *inte* ge svaren som explicita bas-10 tal.

**Var god gå till nästa blad!**

---

<sup>1</sup>Detta är påhittad *fake news*, även om det kanske inte är så långt ifrån sanningen.

7. (a) För grafen  $G_1$  i Figur 1,
- i. Ange en Hamiltoncykel i grafen. (1p)
  - ii. Lägg till en kant så att den nya grafen har en Eulerväg och ange en sådan väg i den nya grafen. (2.5p)
- (b) Låt  $G_2$  vara en 4-cykel med numrerade noder, se Figur 2.
- i. Skriv upp grannmatrisen  $M$  för grafen. (1p)
  - ii. Utan att utföra någon matrismultiplikation, bestäm de stjärnmärkta elementen i matriserna nedan: (2.5p)

$$M^4 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad M^{16} = \begin{bmatrix} \cdot & * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

8. (a) Låt  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  vara talföljden som definieras av följande information: (2p)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_{n+3} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} \quad \forall n \geq 0.$$

Bestäm  $a_{2018}$ . Ingen motivering behövs !

- (b) För positiva heltal  $n, k \in \mathbb{Z}_+$  låt  $p(n, k)$  vara antalet sätt att skriva  $n$  som en summa av  $k$  st positiva heltal, utan hänsyn till ordning. (5p)

EXEMPEL:  $p(7, 3) = 4$  ty det finns följande skrivsätt

$$7 = 5 + 1 + 1 = 4 + 2 + 1 = 3 + 3 + 1 = 3 + 2 + 2.$$

Bevisa att

$$p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k). \quad (1)$$

(OBS! Man måste sätta  $p(\cdot, \cdot) = 0$  så snart minst en av variablerna är mindre än eller lika med noll för att (1) ska alltid make:a sense. Den teknikaliteten behöver du inte grubbla över i ditt bevis.)

**Lycka till!**

## Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/DI2, 180831

- (a) Argumentet är giltigt. Antag att slutsatsen  $q$  är falsk men alla hypoteserna sanna. Då måste  $p$  vara sann enligt H1 och  $s$  vara falsk enligt H3. Att  $p$  är sann medför att  $r$  är falsk enligt H2. Men då är hypotesen i H4 sann och slutsatsen falsk, dvs H4 är falsk, en motsägelse.

(b) i. Sant. Oavsett  $x$  kan vi alltid hitta positiva heltal  $y, z$  så att  $xy|z$ . T.ex. välj  $y = 1, z = x$ .

ii. Falskt. Oavsett  $x$  så kommer inte  $xy|z$  att stämma om t.ex.  $y > z$ .

iii. Sant. Oavsett  $x, y$  kan vi alltid hitta ett  $z$  så att  $xy|z$ . T.ex. välj  $z = xy$ .

iv. Sant. Välj  $x = y = 1$ .
- Reflexivitet:* Ja.  $|A \cap A| = |A|$ , vilket alltid är ett jämnt tal per definition av  $Y$ .

*Symmetri:* Ja, ty  $|A \cap B| = |B \cap A|$ .

*Transitivitet:* Nej. T.ex. välj  $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{1, 3\}$ . Då är  $|A \cap B| = |B \cap C| = 2$ , men  $|A \cap C| = 1$ .
- Olikheten stämmer inte för  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ , vilket kan kontrolleras direkt, men gör det för alla  $n \geq 4$ . Vi bevisar det senare med induktion.

*Steg 1:* Basfallet  $n = 4$  måste kontrolleras:

$$2^4 = 16 > 13 = 1 + 4 + \frac{4^2}{2}.$$

*Steg 2:* Induktionssteget. Antag att

$$2^n > 1 + n + \frac{n^2}{2}. \quad (1)$$

Vi vill härleda att

$$2^{n+1} > 1 + (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2}. \quad (2)$$

Vi har

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > \text{enligt (1)} > 2 \left( 1 + n + \frac{n^2}{2} \right),$$

så det räcker att visa att

$$\begin{aligned} 2 \left( 1 + n + \frac{n^2}{2} \right) &> 1 + (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2} \\ \Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 &> \frac{5}{2} + 2n + \frac{n^2}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{n^2}{2} &> \frac{1}{2} \Leftrightarrow n > 1, \end{aligned}$$

vilket stämmer ty  $n \geq 4$  antas.

- (a) Primitalsfaktoriseringarna lyder

$$273 = 3 \cdot 7 \cdot 13, \quad 756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Så

$$\begin{aligned} \Phi(273) &= (3-1)(7-1)(13-1) = 2 \cdot 6 \cdot 12 = 144, \\ \Phi(756) &= (2^2-2^1)(3^3-3^2)(7-1) = 2 \cdot 18 \cdot 6 = 216, \\ \text{SGD}(273, 756) &= 3 \cdot 7 = 21. \end{aligned}$$

(b) Vi kan dela igenom med 21 för att få den ekvivalenta ekvationen

$$36x + 13y = 600. \quad (3)$$

Vi kör Euklides på paret (36, 13). Först framåt:

$$\begin{aligned} 36 &= 2 \cdot 13 + 10, \\ 13 &= 1 \cdot 10 + 3, \\ 10 &= 3 \cdot 3 + 1, \end{aligned}$$

sedan bakåt

$$\begin{aligned} 1 &= 10 - 3 \cdot 3 \\ &= 10 - 3(13 - 10) \\ &= 4 \cdot 10 - 3 \cdot 13 \\ &= 4(36 - 2 \cdot 13) - 3 \cdot 13 \\ &= 4 \cdot 36 - 11 \cdot 13. \end{aligned}$$

Alltså,

$$36 \cdot 4 + 13 \cdot (-11) = 1.$$

Multiplitera igenom med 600 så har vi vår baslösning till (3)

$$x_0 = 2400, \quad y_0 = -6600.$$

Den allmänna lösningen lyder

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \left(\frac{b}{d}\right)n = 2400 - 13n, \\ y &= y_0 + \left(\frac{a}{d}\right)n = -6600 + 36n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

För  $n = 184$  får vi den enda lösningen med både  $x$  och  $y$  positiva, nämligen  $x = 8$ ,  $y = 24$ . Det finns fyra lösningar med  $|x| + |y| < 100$ , svarande mot  $n = 182, 183, 184, 185$ . Dessa är, respektivt,

$$(34, -48), \quad (21, -12), \quad (8, 24), \quad (-5, 60).$$

5. (a) Först notera att

$$3^{-1} \equiv 2 \pmod{5}, \quad 4^{-1} \equiv 2 \pmod{7}, \quad 5^{-1} \equiv 5 \pmod{8}.$$

Det innebär att kongruenserna kan skrivas om till den enklare formen

$$x \equiv 2 \pmod{5}, \quad x \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \pmod{7}, \quad x \equiv 5 \cdot 3 \equiv 7 \pmod{8}.$$

Den allmänna lösningen ges av

$$x \equiv 2 \cdot b_1 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot b_2 \cdot 5 \cdot 8 + 7 \cdot b_3 \cdot 5 \cdot 7 \pmod{5 \cdot 7 \cdot 8}, \quad (4)$$

där

$$\begin{aligned} 7 \cdot 8 \cdot b_1 &\equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 56b_1 \equiv 1 \Rightarrow \text{tag } b_1 = 1, \\ 5 \cdot 8 \cdot b_2 &\equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 40b_2 \equiv 1 \Rightarrow 5b_2 \equiv 1 \Rightarrow \text{tag } b_2 = 3, \\ 5 \cdot 7 \cdot b_3 &\equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 35b_3 \equiv 1 \Rightarrow 3b_3 \equiv 1 \Rightarrow \text{tag } b_3 = 3. \end{aligned}$$

Insättning in i (4) ger

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 + 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 \pmod{240} \equiv \\ &\equiv 112 + 480 + 735 \equiv 1327 = 4 \cdot 280 + 207 \equiv 207 \pmod{280}, \end{aligned}$$

så den allmänna lösningen är  $x \equiv 207 \pmod{280}$  och den minsta positiva lösningen är tydligen  $x = 207$ .

(b) Alla kongruenser är modulo 13. Notera först att  $31 \equiv 5$ . Då kan vi räkna

$$5^1 \equiv 5, \quad 5^2 = 25 \equiv -1, \quad 5^3 \equiv -5 \equiv 8, \quad 5^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1.$$

Det följer för godtyckligt  $n \in \mathbb{Z}$  att  $5^n \equiv 5^{n(\bmod 4)}$  och i synnerhet att  $5^n \equiv 1$  om och endast om  $n$  är en multipel av 4.

6. (a)  $7^{20}$ .

(b)  $\binom{20+7-1}{7-1} = \binom{26}{6}$ .

(c)  $\binom{20}{5} \times \binom{15}{6}$ .

(d)  $\binom{20}{2} \times 3^2 \times 4^{18} + \binom{20}{1} \times 3^1 \times 4^{19} + \binom{20}{0} \times 3^0 \times 4^{20} = 4^{18}(190 \times 9 + 20 \times 3 \times 4 + 16) = 1966 \times 4^{18}$ .

(e) Första händelsen är mer sannolik. Av symmetriskäl så är sannolikheten för första händelsen strängt större än  $\frac{1}{2}$  (det finns en nollskild sannolikhet att medelvärdet är *exakt* 21 grader). Sannolikheten för den andra händelsen är  $(\frac{6}{7})^{20}$ . Man behöver inte beräkna detta exakt för att inse att det är betydligt mindre än  $\frac{1}{2}$ .

7. (a) i. T.ex.

$$a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow h \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j \rightarrow i \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow a.$$

ii. Det finns fyra noder av udda grad, nämligen  $a, h, k, l$ . Det gäller att förbinda ett par av dessa som inte redan är förbundade, t.ex. lägg till kanten  $\{h, l\}$ . Då får vi en graf där bara  $a$  och  $k$  har udda grad. Det finns således en Eulerväg mellan dessa. T.ex.

$$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a \rightarrow d \rightarrow f \rightarrow b \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow i \rightarrow g \rightarrow \\ \rightarrow h \rightarrow b \rightarrow e \rightarrow h \rightarrow j \rightarrow i \rightarrow l \rightarrow h \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j \rightarrow k.$$

(b) i.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii. Elementet i  $M^4$  är antalet vägar av längd 4 mellan noder 1 och 3. Antalet sådana vägar är  $2^3 = 8$  eftersom

- vi har två val för första steget

- oavsett första steget har vi två val för andra steget

- oavsett första och andra stegen har vi två val för tredje steget

- oavsett tidigare steg har vi bara ett val för sista steget för vi måste hamna i nod 3.

Elementet i  $M^{16}$  är antalet vägar av längd 16 mellan noder 1 och 2. Det finns inga sådana vägar alls ty om vi börjar i nod 1 så måste vi efter ett jämnt antal steg hamna i antingen nod 1 eller nod 3.

8. (a) Först har vi  $a_3 = \frac{a_2+a_0}{a_1} \Rightarrow 3 = \frac{a_2+1}{2} \Rightarrow a_2 = 5$ . Så talföljden börjar 1, 2, 5, 3. Man kan sedan lätt kontrollera att dessa fyra tal upprepar sig, vilket innebär, eftersom  $2018 \equiv 2 \pmod{4}$ , att  $a_{2018} = a_2 = 5$ .

(b) Då talet  $n$  skrivs som en summa av  $k$  st positiva heltal, finns det följande två alternativ:

FALL 1: Någon summand är en etta. Tar vi bort den (finns det flera ettor så tar vi bort en av dem - det spelar ingen roll vilken ty man har inte hänsyn till ordning) så har vi skrivit  $n - 1$  som en summa av  $k - 1$  st positiva heltal. Antalet skrivsätt i Fall 1 är således  $p(n - 1, k - 1)$ .

FALL 2: Ingen summand är en etta, dvs varje term är minst två. Om vi drar bort ett

från varje summand har vi fortfarande  $k$  st *positiva* heltal och deras summa är  $n - k$ . Antalet skrivsätt i Fall 2 är således  $p(n - k, k)$ .

Lägger vi ihop de två fallen (additionsprincipen) så har vi bevisat att  $p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k)$ .