Intromatte D, HT-2018
Demouppgifter 24/8

1. Låt

$$A = \{1,\, \{2,\, \{3,\, 4\}\}\}, \quad B = \{1,\, 2,\, 3\}, \quad C = \{\{1\},\, \{2\},\, \{3\}\}.$$

Bestäm (i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$ (iii) $|\mathcal{P}(A)|$ (iv) $\mathcal{P}(A) \cap C$.

2 (a) Vilken/a av följande ekvationer stämmer för *alla* mängder A och B ? I fall du hävdar att en ekvation alltid stämmer ge ett bevis, annars ge ett motexempel.

(i) $(A \times A) \cap (B \times B) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.
(ii) $(A \times A) \backslash (B \times B) = (A \backslash B) \times (A \backslash B)$.

(b) Som alla teknologer vet[1], så gäller för alla reella tal $a,\, b$ att

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ba = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Kan du komma på en analog formel för mängder ?

3. För varje $a \in \mathbb{R}$ definierar vi en funktion $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enligt

$$f_a(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 3, & x \geq 0, \\ x + 2, & x < 0. \end{cases}$$

(i) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är f_a surjektiv ?
(ii) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är f_a injektiv ?
(iii) För vilka $a \in \mathbb{R}$ är f_a bijektiv ?
(iv) Skriv en formel för f_0^{-1} och skissa dess graf.

4. Använd sållprincipen för att bestämma antalet heltal i intervallet $[1,\, 2018]$ som är delbara med varken 2 eller 3. Använd mängder när du skriver din lösning.
Skriv sedan ner en allmän formel för funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som ges av

$$f(n) = \text{antalet heltal i intervallet } [1,\, n] \text{ som är delbara med varken } 2 \text{ eller } 3.$$

[1]Nja, det har hänt då och då att folk har gjort det klassiska misstaget och skrivit $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.