Intromatte D, HT-2018
Demouppgifter 24/8, Lösningar

1.

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= \{1\}, \\
B \cap C &= \phi, \\
|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} &= 2^2 = 4, \\
\mathcal{P}(A) \cap C &= \{\{1\}\}.
\end{aligned}
$$

2, (a, i). Detta är sant för alla $A,\ B$. Vi har

$$
\begin{aligned}
(x,\ y) \in (A \times A) \cap (B \times B) &\Leftrightarrow \\
(x,\ y) \in A \times A \text{ och } (x,\ y) \in B \times B &\Leftrightarrow \\
[x \in A \text{ och } y \in A] \text{ och } [x \in B \text{ och } y \in B] &\Leftrightarrow \\
x \in A \cap B \text{ och } y \in A \cap B &\Leftrightarrow \\
(x,\ y) \in (A \cap B) \times (A \cap B), &\quad \text{v.s.v.}
\end{aligned}
$$

(a, ii). Detta är i allmänhet falskt. HL är alltid en delmängd till VL. Mer precis så är

$$
(A\times A)\backslash(B\times B) = [(A\backslash B)\times(A\backslash B)]\cup[(A\cap B)\times(A\backslash B)]\cup[(A\backslash B)\times(A\cap B)]. \quad (1)
$$

Se Figur 2(a,ii) för en illustration av detta. Det följer att HL är en äkta delmängd till VL så snart någon av de två sista termerna i (1) är icke-tom. Detta är fallet om och endast om $A\backslash B \neq \phi$ och $A \cap B \neq \phi$. M.a.o. VL och HL är lika om och endast om antingen

- $A = B$, eller
- $A \cap B = \phi$, dvs A och B är *disjunkta*.

Så för ett konkret motexempel välj A och B s.a. inget av dessa två villkor är uppfyllda. T.ex. $A = \{1,\ 2\}$, $B = \{2,\ 3\}$. Då blir

$$
\begin{aligned}
(A \times A)\backslash(B \times B) &= \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)\}, \\
(A\backslash B) \times (A\backslash B) &= \{(1,\ 1)\}.
\end{aligned}
$$

(b) Den formel jag tänker på är

$$
(A \cup B) \times (A \cup B) = (A \times A) \cup (B \times B) \cup (A \times B) \cup (B \times A). \quad (2)
$$

Se Figur 2(b) för en illustration av detta.

OBS! Formler (1) och (2) säger egentligen samma sak. Man kan översätta (1) till (2) genom att

- i (1) sätta $\mathcal{A} := A\backslash B$, $\mathcal{B} := A \cap B$,
- skriva ut (2) för paret $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$,
- tänka att $(A \times A)\backslash(B \times B) = (A \times A)\backslash[(A \cap B) \times (A \cap B)]$.

Detaljerna lämnas till läsaren.

3. Först betrakta $g_a(x) = x^2 - ax + 3$, definierad i hela $\mathbb{R}$. Notera att $g_a'(x) = 2x - a$ så $g_a(x)$ har sin vändpunkt i $x = a/2$ och dess minsta värde är $g_a(a/2) = (a/2)^2 - a(a/2) + 3 = 3 - a^2/4$. Av detta följer tre relevanta observationer:

(A) $g_a(x)$ är växande i hela intervallet $[0, \infty)$ om och endast om $a \leq 0$.

(B) För alla $a \in \mathbb{R}$ så är $g_a(0) = 3$.

(C) Om $a > 0$ så gäller att $g_a(x)$ först minskar till höger om $x = 0$ tills den når ett minimum vid $x = a/2$, där värdet är $3 - a^2/4$. Detta minsta värde är alltså strängt större 2 om och endast om $a < 2$.

Eftersom $h(x) = x + 2$ är växande i hela $\mathbb{R}$ och når upp till värdet $h(0) = 2$ vid $x = 0$, så har vi följande slutsatser:

(A)+(B)+(C) $\Rightarrow$ f_a är surjektiv om och endast om $a \geq 2$.

(A) $\Rightarrow$ f_a är injektiv om och endast om $a \leq 0$.

$\Rightarrow$ det finns inget a för vilket f_a är både injektiv och surjektiv, dvs bijektiv.

Slutligen ges f_0^{-1} av

$$f_0^{-1}(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 2, \\ \sqrt{x - 3}, & x \geq 3. \end{cases}$$

I synnerhet så är f_0^{-1} odefinierad i intervallet $[2, 3)$, ty detta intervall saknas från f_0:s värdemängd. Värdemängden till f_0^{-1} är samma sak som definitionsmängden till f_0, vilket är hela $\mathbb{R}$.

Se Figur 3 för grafens skiss. Notera att grafen är spegelbilden i linjen $y = x$ av grafen till f_0.

4. Först inför vi lite standard notation vilket komer att underlätta hur vi skriver våra formler.

DEFINITION/NOTATION: Låt $x \in \mathbb{R}$. *Heltalsdelen* till x, vilket betecknas $\lfloor x \rfloor$, är det största heltalet som är mindre än eller lika med x.

(Så om talet x skrivs som en decimal, $\lfloor x \rfloor$ är heltalet framför kommatecknet).

Sätt nu

$$
\begin{aligned}
U = [1,\, 2018] &\text{(här gäller “notationsmisshandel”: vi menar } [1,\, 2018] \cap \mathbb{N}),\\
A &= \{n \in U : 2 \,|\, n\},\\
B &= \{n \in U : 3 \,|\, n\}.
\end{aligned}
$$

Vi söker

$$
\begin{aligned}
|U \backslash (A \cup B)| &= |U| - |A \cup B| = 2018 - |A \cup B| = \\
&\overset{\text{såll}}{=} 2018 - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 2018 - |A| - |B| + |A \cap B|.
\end{aligned}
$$

Eftersom vartannat heltal är delbart med 2 så är $|A| = \lfloor \frac{2018}{2} \rfloor = 1009$.
Eftersom vart tredje heltal är delbart med 3 så är $|B| = \lfloor \frac{2018}{3} \rfloor = \lfloor 672\frac{2}{3} \rfloor = 672$.
Slutligen betraktar vi $A \cap B$. Per definition så består den mängden av alla heltal mellan 1 och 2018 som är delbara med *både* 2 och 3. Men ett heltal är delbart med både 2 och 3 om och endast om det är delbart med 6. Och eftersom vart sjätte heltal är delbart med 6 så medför detta att $|A \cap B| = \lfloor \frac{2018}{6} \rfloor = \lfloor 336\frac{1}{3} \rfloor = 336$.

Insättning ger

$$|U \backslash (A \cup B)| = 2018 - 1009 - 672 + 336 = 673.$$

Enligt samma sorts resonemang får vi den allmänna formeln

$$f(n) = n - \lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/3 \rfloor + \lfloor n/6 \rfloor.$$