Inledande diskret matematik D1/DI2, HT2018
Uppgift 4.16

Uppgiften. *Bevisa, för alla* $n \in \mathbb{Z}_+$, *att*

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = (n-1)2^n + 1. \tag{1}$$

Lösning 1: Induktion på n (gjordes på lektionen 20/9).

Lösning 2: (gjordes också på lektionen 20/9). För alla reella $x \neq 1$ gäller (formeln för en geometrisk serie)

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}. \tag{2}$$

Om vi deriverar båda leden i (2) med avseende på x så härleder vi ekvationen

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1} = \frac{(x-1)(n+1)x^n - 1 \cdot (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}. \tag{3}$$

Sätt nu $x = 2$. VL av (3) överensstämmer exakt med VL av (1). HL av (3) blir

$$n \cdot 2^{n+1} - (n+1)2^n + 1 = 2^n[(2n) - (n+1)] + 1 = (n-1)2^n + 1,$$

vilket är också HL av (1), v.s.v.

Lösning 3: Följande skulle kallas för ett *kombinatoriskt bevis*. Med detta menas att vi identifierar en mängd A sådan att båda leden i (1) räknar elementen i A, fast på två olika sätt. Det gäller alltså att komma på rätt A. Det finns olika saker man kan göra, men det enklaste jag kom på var att ta

$$A = \{(X, e) : X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, X \neq \phi, 1 \leq e \leq \max(X)\},$$

där $\max(X)$ betecknar det största talet i mängden X. Jag hävdar att båda leden i (1) är lika med $|A|$.

VL: Eftersom mängden X måste vara icke-tom så måste $\max(X)$ vara ett av talen $1, 2, \ldots, n$. Antag att $\max(X) = k$. Då finns det 2^{k-1} möjligheter för X ty $X = \{k\} \cup Y$, där Y är en valfri delmängd till $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Givet X, finns det k möjligheter för e, ty $1 \leq e \leq k$. Således finns det $k \cdot 2^{k-1}$ möjligheter för paret (X, e), givet att $\max(X) = k$. Då vi summerar över $k = 1, 2, \ldots, n$ så får vi hela A, v.s.v.

HL: Här ska vi ta hjälp av (2), vilket i fallet $x = 2$ säger

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1. \tag{4}$$

Vi betraktar igen möjligheterna för ett element $(X,\, e) \in A$ men denna gång utgår vi från e i stället för X. A priori så är e ett av talen $1,\, 2,\, \ldots,\, n$. Antag att $e = k$. Då finns det $2^n - 2^{k-1}$ möjligheter för X, ty $e \le \max(X)$ vilket innebär att X kan vara vilken som helst delmängd till $\{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ förutom en delmängd till $\{1,\, 2,\, \ldots,\, k-1\}$. Då vi summerar över $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$ får vi hela A, vilket medför att

$$\begin{aligned} |A| = \sum_{k=1}^{n}(2^n - 2^{k-1}) = n \cdot 2^n - \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = \\ = n \cdot 2^n - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = n \cdot 2^n - \left(\sum_{j=0}^{n} 2^j - 2^n\right) = \end{aligned}$$

$$\overset{(4)}{=} n \cdot 2^n - [(2^{n+1} - 1) - 2^n] = 2^n(n - 2 + 1) + 1 = (n-1)2^n + 1, \quad \text{v.s.v.}$$