Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2019-01-08 kl. 08.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anton Johansson, telefon: 5325 (alt. Peter Hegarty 070-5705475)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 21 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2018. Preliminärt så krävs 31 poäng för betyget 4 och 41 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 29 januari. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. I uppgifter 1, 3, 5, 6, 7, 8 kan de olika deluppgifterna lösas helt oberoende av varandra. I uppgift 6 behöver man *aldrig* räkna ut svaren som explicita bas-10 tal.

Uppgifterna

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. Motivera väl ! (3p)
(Obs! $a \oplus b = (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$).

$$\begin{array}{r} \neg(p \oplus q) \\ q \to r \\ \neg(p \wedge s) \\ p \vee r \to s \\ \hline \neg q \end{array}$$

(b) Låt universumet $U = \mathbb{Q}$ och låt P vara följande predikat av tre variabler: (3p)

$$P(a,\, b,\, c):\ ab = c^2.$$

Avgör huruvida var och en av följande utsagor är sann eller falsk:

$$\forall a\, \forall b\, \exists c \ \ P(a,\, b,\, c)$$
$$\forall c\, \exists a\, \exists b \ \ P(a,\, b,\, c)$$
$$\exists a\, \forall b\, \exists c \ \ P(a,\, b,\, c).$$

2. Låt U vara mängden av alla oändliga delmängder till $\mathbb{Z}$, dvs (3p)

$$U = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : |A| = \infty\}.$$

Låt $\mathcal{R}$ vara följande relation på U:

$$\mathcal{R} = \{(A,\, B) \in \mathcal{U}^2 : A \Delta B \in U\}.$$

Vilken/vilka av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet har $\mathcal{R}$? Motivera väl !

Var god vänd!

3. Låt talföljden $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt enligt

$$u_0 = u_1 = 1, \quad u_{n+2} = -4u_{n+1} + 5u_n + 3^n + 1 \;\; \forall\, n \geq 0.$$

(a) Beräkna u_2 och u_3. (2p)

(b) Bevisa att för alla heltal $n \geq 0$ gäller (5p)

$$u_n = \frac{7}{144}(-5)^n + \frac{8}{9} + \frac{3^n}{16} + \frac{n}{6}.$$

4. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (4.5p)

$$1960x + 631y = 10,$$

samt den lösning som minimerar $|x| + |y|$.

(b) Bestäm (3.5p)

$$631^{2015} \pmod{1960}.$$

5. (a) För vilka $b \in \mathbb{Z}$ är systemet (1p)

$$x \equiv 3 \pmod 5, \quad 2x \equiv b \pmod 8, \quad 3x \equiv 1 \pmod{11}$$

av kongruenser lösbart ?

(Obs! Det räcker med rätt svar, ingen motivering behövs).

(b) För $b = 4$ bestäm både den allmänna och den största negativa lösningen till systemet. (4p)

6. Peter besöker ofta den nedre våningen på Akademibokhandeln i Nordstan och oftast då befinner sig framför en av följande fem hyllor: Naturvetenskap (N), Samhälle (S), Politik (P), Ekonomi (E), Historia (H).

Antag att var och en av dessa hyllor har 100 olika böcker (ett exemplar av varje bok !), att varje bok på N och S hyllorna kostar 100kr och att varje bok på P, E och H hyllorna kostar 50kr.

(a) På hur många sätt kan Peter köpa 6 valfria böcker och sedan ställa dem på hyllan hemma från vänster till höger ? (1.6p)

(b) Hur många möjligheter finns det för Peter att köpa 6 böcker om det enda vi bryr oss om är hur många han tar från var och en av de fem hyllorna, och inte de exakta titlarna ? (1.6p)

(c) På hur många sätt kan Peter spendera exakt 200kr ? (1.6p)

(d) Om Peter plockar 6 böcker på måfå, vad är sannolikheten att han plockar lika många från N och S hyllorna ? (1.6p)

(e) Samma fråga som i (a) men under förutsättning att det fanns exakt fem exemplar av varje bok på hyllorna. (1.6p)

Obs! I deluppgifter (b), (c) och (d) ska Peter bara köpa böcker, inte ställa upp dem hemma. Endast i (b) bryr man sig *inte* om de exakta titlarna som han köper.

Var god vänd!

7. (a) Vilken/a av talföljderna (3p)

$$1, 2, 3, 4, 4, 5$$
$$1, 3, 3, 4, 4, 5$$

är grafisk/a ? Om du hävdar att en talföljd inte är grafisk, motivera varför. Annars, rita en graf med dessa gradtal.

(b) För grafen i Figur 1, (3p)

i. ange en Hamiltoncykel

ii. ange en minimal mängd av kanter vars borttagning skulle lämna en graf med en Eulerväg. Ange sedan en explicit Eulerväg i den resulterande grafen.

(c) Följande information är given om en viss (enkel) graf G: (3p)

- G har 12 noder, numrerade $1 - 12$.

- G har tre sammanhängande komponenter C_1, C_2, C_3 som består respektivt av noderna $1 - 4$, $5 - 8$ och $9 - 12$.

- C_1 är fullständig, C_2 är en cykel och C_3 är ett träd men inte en kedja.

Hur många möjligheter lämnar detta för grafens grannmatris ? Skriv upp *en* av dessa möjligheter.

8. Bevisa att det inte finns någon (enkel) graf på 50 noder som är isomorf med dessa egna komplement. (4p)

Lycka till!