Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2019-01-08 kl. 08.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anton Johansson, telefon: 5325 (alt. Peter Hegarty 070-5705475)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 21 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2018. Preliminärt så krävs 31 poäng för betyget 4 och 41 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 29 januari. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. I uppgifter 1, 3, 5, 6, 7, 8 kan de olika deluppgifterna lösas helt oberoende av varandra. I uppgift 6 behöver man *aldrig* räkna ut svaren som explicita bas−10 tal.

Uppgifterna

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. Motivera väl ! (3p)
(OBS! $a \oplus b = (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$).

$$\begin{array}{r} \neg(p \oplus q) \\ q \to r \\ \neg(p \wedge s) \\ p \vee r \to s \\ \hline \neg q \end{array}$$

(b) Låt universumet $U = \mathbb{Q}$ och låt P vara följande predikat av tre variabler: (3p)

$$P(a, b, c): \; ab = c^2.$$

Avgör huruvida var och en av följande utsagor är sann eller falsk:

$$\forall a \, \forall b \, \exists c \;\; P(a, b, c)$$
$$\forall c \, \exists a \, \exists b \;\; P(a, b, c)$$
$$\exists a \, \forall b \, \exists c \;\; P(a, b, c).$$

2. Låt U vara mängden av alla oändliga delmängder till $\mathbb{Z}$, dvs (3p)

$$U = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : |A| = \infty\}.$$

Låt $\mathcal{R}$ vara följande relation på U:

$$\mathcal{R} = \{(A, B) \in \mathcal{U}^2 : A \Delta B \in U\}.$$

Vilken/vilka av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet har $\mathcal{R}$? Motivera väl !

Var god vänd!

3. Låt talföljden $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt enligt

$$u_0 = u_1 = 1, \quad u_{n+2} = -4u_{n+1} + 5u_n + 3^n + 1 \;\; \forall\, n \geq 0.$$

(a) Beräkna u_2 och u_3. (2p)

(b) Bevisa att för alla heltal $n \geq 0$ gäller (5p)

$$u_n = \frac{7}{144}(-5)^n + \frac{8}{9} + \frac{3^n}{16} + \frac{n}{6}.$$

4. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (4.5p)

$$1960x + 631y = 10,$$

samt den lösning som minimerar $|x| + |y|$.

(b) Bestäm (3.5p)

$$631^{2015} \pmod{1960}.$$

5. (a) För vilka $b \in \mathbb{Z}$ är systemet (1p)

$$x \equiv 3 \pmod 5, \quad 2x \equiv b \pmod 8, \quad 3x \equiv 1 \pmod{11}$$

av kongruenser lösbart ?

(Obs! Det räcker med rätt svar, ingen motivering behövs).

(b) För $b = 4$ bestäm både den allmänna och den största negativa lösningen till systemet. (4p)

6. Peter besöker ofta den nedre våningen på Akademibokhandeln i Nordstan och oftast då befinner sig framför en av följande fem hyllor: Naturvetenskap (N), Samhälle (S), Politik (P), Ekonomi (E), Historia (H).

Antag att var och en av dessa hyllor har 100 olika böcker (ett exemplar av varje bok !), att varje bok på N och S hyllorna kostar 100kr och att varje bok på P, E och H hyllorna kostar 50kr.

(a) På hur många sätt kan Peter köpa 6 valfria böcker och sedan ställa dem på hyllan hemma från vänster till höger ? (1.6p)

(b) Hur många möjligheter finns det för Peter att köpa 6 böcker om det enda vi bryr oss om är hur många han tar från var och en av de fem hyllorna, och inte de exakta titlarna ? (1.6p)

(c) På hur många sätt kan Peter spendera exakt 200kr ? (1.6p)

(d) Om Peter plockar 6 böcker på måfå, vad är sannolikheten att han plockar lika många från N och S hyllorna ? (1.6p)

(e) Samma fråga som i (a) men under förutsättning att det fanns exakt fem exemplar av varje bok på hyllorna. (1.6p)

Obs! I deluppgifter (b), (c) och (d) ska Peter bara köpa böcker, inte ställa upp dem hemma. Endast i (b) bryr man sig *inte* om de exakta titlarna som han köper.

Var god vänd!

7. (a) Vilken/a av talföljderna (3p)

$$1, 2, 3, 4, 4, 5$$
$$1, 3, 3, 4, 4, 5$$

är grafisk/a ? Om du hävdar att en talföljd inte är grafisk, motivera varför. Annars, rita en graf med dessa gradtal.

(b) För grafen i Figur 1, (3p)

i. ange en Hamiltoncykel

ii. ange en minimal mängd av kanter vars borttagning skulle lämna en graf med en Eulerväg. Ange sedan en explicit Eulerväg i den resulterande grafen.

(c) Följande information är given om en viss (enkel) graf G: (3p)

- G har 12 noder, numrerade $1 - 12$.
- G har tre sammanhängande komponenter C_1, C_2, C_3 som består respektivt av noderna $1 - 4$, $5 - 8$ och $9 - 12$.
- C_1 är fullständig, C_2 är en cykel och C_3 är ett träd men inte en kedja.

Hur många möjligheter lämnar detta för grafens grannmatris ? Skriv upp *en* av dessa möjligheter.

8. Bevisa att det inte finns någon (enkel) graf på 50 noder som är isomorf med dessa egna komplement. (4p)

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/DI2, 190108

1. (a) Argumentet är giltigt. Vi för ett motsägelsebevis. Antag att slutsatsen är falsk och alla hypoteserna sanna. Så $\neg q = 0$, vilket innebär att $q = 1$. Då är $r = 1$ enligt H2. Då är $s = 1$ enligt H4. Då måste $p = 0$ enligt H3. Men nu har vi $p = 0$ och $q = 1$, så $p \oplus q$ är sann vilket motsäger H1.

(b) i. Falsk. Tag t.ex. $a = 2$, $b = 1$. Då finns det inget $c \in \mathbb{Q}$ så att $ab = c^2$, ty $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal.

ii. Sann. Oavsett c kan vi alltid välja a och b så att $ab = c^2$, Enklaste valet vore ju $a = b = c$.

iii. Sann. Om $a = 0$ så gäller för alla b att $ab = c^2$ då också $c = 0$.

2. *Reflexivitet*: Nej. Den symmetriska differensen av en mängd med sig själv är alltid den tomma mängden, vilket är ändlig.
Symmetri: Ja, ty symmetrisk differens är en kommutativ operator, dvs $A \Delta B = B \Delta A$.
Transitivitet: Nej. Låt t.ex. A bestå av alla udda tal, B av alla jämna tal och $C = A$. Vi har $A \Delta B = \mathbb{Z}$ så $(A, B) \in \mathcal{R}$ och $(B, A) \in \mathcal{R}$. Men $(A, A) \notin \mathcal{R}$.

3. (a) Sätt

$$\begin{aligned} n = 0: \quad u_2 &= -4u_1 + 5u_0 + 3^0 + 1 = -4 + 5 + 1 + 1 = 3, \\ n = 1: \quad u_3 &= -4u_2 + 5u_1 + 3^1 + 1 = -12 + 5 + 3 + 1 = -3. \end{aligned}$$

(b) Vi bevisar formeln med induktion.

Steg 1: Basfallen $n = 0$, 1 måste kontrolleras:

$$\begin{aligned} n = 0: \quad \text{VL} = u_0 = 1 &= \frac{7}{144} + \frac{8}{9} + \frac{1}{16} + 0 = \text{HL}, \\ n = 1: \quad \text{VL} = u_1 = 1 &= -\frac{35}{144} + \frac{8}{9} + \frac{3}{16} + \frac{1}{6} = \text{HL}. \end{aligned}$$

Steg 2: Induktionssteget. Låt $n \geq 0$ och antag att

$$u_n = \frac{7}{144}(-5)^n + \frac{8}{9} + \frac{3^n}{16} + \frac{n}{6}, \tag{1}$$

$$u_{n+1} = \frac{7}{144}(-5)^{n+1} + \frac{8}{9} + \frac{3^{n+1}}{16} + \frac{n+1}{6}. \tag{2}$$

Vi vill härleda från (1) och (2) att

$$u_{n+2} = \frac{7}{144}(-5)^{n+2} + \frac{8}{9} + \frac{3^{n+2}}{16} + \frac{n+2}{6}. \tag{3}$$

Vi har

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= -4u_{n+1} + 5u_n + 3^n + 1 \\ &\overset{(1),(2)}{=} -4\left[\frac{7}{144}(-5)^{n+1} + \frac{8}{9} + \frac{3^{n+1}}{16} + \frac{n+1}{6}\right] + 5\left[\frac{7}{144}(-5)^n + \frac{8}{9} + \frac{3^n}{16} + \frac{n}{6}\right] + 3^n + 1 \\ &= (-5)^n \cdot \frac{7}{144}\left[(-5)(-4) + 5\right] + \frac{8}{9}[-4 + 5] + \frac{3^n}{16}\left[-4 \cdot 3 + 5 + 16\right] + \frac{1}{6}[-4(n+1) + 5n + 6] \\ &= (-5)^n \cdot \frac{7}{144} \cdot 5^2 + \frac{8}{9} + \frac{3^n}{16} \cdot 3^2 + \frac{1}{6}(n+2) \\ &= \frac{7}{144}(-5)^{n+2} + \frac{8}{9} + \frac{3^{n+2}}{16} + \frac{n+2}{6}, \quad \text{v.s.v.} \end{aligned}$$

4. (a) Vi kör Euklides på paret (1960, 631). Först framåt:

$$\begin{aligned}
1960 &= 3 \cdot 631 + 67, \\
631 &= 9 \cdot 67 + 28, \\
67 &= 2 \cdot 28 + 11, \\
28 &= 2 \cdot 11 + 6, \\
11 &= 1 \cdot 6 + 5, \\
6 &= 1 \cdot 5 + 1.
\end{aligned}$$

Så $\mathrm{SGD}(1960, 631) = 1$ och ekvationen har en lösning. Nu fortsätter vi bakåt:

$$\begin{aligned}
1 &= 6 - 5 \\
&= 6 - (11 - 6) \\
&= 2 \cdot 6 - 11 \\
&= 2(28 - 2 \cdot 11) - 11 \\
&= 2 \cdot 28 - 5 \cdot 11 \\
&= 2 \cdot 28 - 5(67 - 2 \cdot 28) \\
&= 12 \cdot 28 - 5 \cdot 67 \\
&= 12(631 - 9 \cdot 67) - 5 \cdot 67 \\
&= 12 \cdot 631 - 113 \cdot 67 \\
&= 12 \cdot 631 - 113(1960 - 3 \cdot 631) \\
&= -113 \cdot 1960 + 351 \cdot 631.
\end{aligned}$$

Alltså,

$$-113 \cdot 1960 + 351 \cdot 631 = 1. \tag{4}$$

Multiplicera igenom med 10 så har vi vår baslösning

$$x_0 = -1130, \qquad y_0 = 3510.$$

Den allmänna lösningen lyder

$$\begin{aligned}
x &= x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n = -1130 + 631n, \\
y &= y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) n = 3510 - 1960n, \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Det är uppenbart att $n = 2$ ger lösningen med minsta $|x| + |y|$, alltså $(x, y) = (132, -410)$.

(b) Notera att $\mathrm{SGD}(1960, 631) = 1$ från (a) så Eulers sats gäller. Vi har

$$\Phi(1960) = \Phi(2^3 \cdot 5 \cdot 7^2) = (2^3 - 2^2)(5 - 1)(7^2 - 7) = 4 \cdot 4 \cdot 42 = 672.$$

Så Eulers sats innebär att $631^{672} \equiv 1 \pmod{1960}$. Notera nu att $2015 = 2016 - 1 = 3 \cdot 672 - 1$. Därför är $631^{2015} \equiv 631^{-1} \pmod{1960}$. Men inversen till $631 \pmod{1960}$ kan avläses från (4) och är 351.

SVAR: 351.

5. (a) b måste vara ett jämnt tal.

(b) Vi kan dela igenom med 2 i den andra kongruensen, samt multiplicera igenom med $3^{-1} \equiv 4$ i den tredje kongruensen och få det ekvivalenta systemet

$$x \equiv 3 \pmod 5, \quad x \equiv 2 \pmod 4, \quad x \equiv 4 \pmod{11}.$$

Den allmänna lösningen lyder

$$x \equiv 3 \cdot b_1 \cdot 4 \cdot 11 + 2 \cdot b_2 \cdot 5 \cdot 11 + 4 \cdot b_3 \cdot 5 \cdot 4 \pmod{5 \cdot 4 \cdot 11}, \tag{5}$$

där

$$\begin{aligned} 44b_1 &\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow \text{tag } b_1 = -1, \\ 55b_2 &\equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow \text{tag } b_2 = -1, \\ 20b_3 &\equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow \text{tag } b_3 = 5. \end{aligned}$$

Insättning in i (5) ger

$$x \equiv -3 \cdot 44 - 2 \cdot 55 + 4 \cdot 5 \cdot 20 \equiv -132 - 110 + 400 \equiv 158 \equiv -62 \pmod{220}.$$

6. (a) $P(500,\, 6) = 500 \times 499 \times 498 \times 497 \times 496 \times 495$.

(b) $\binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$.

(c) Peter kan antingen köpa
- två böcker för 100kr var, eller
- en bok för 100kr och två böcker för 50kr var, eller
- fyra böcker för 50kr var.

Det totala antalet möjligheter blir därmed

$$\binom{200}{2} + 200 \cdot \binom{300}{2} + \binom{300}{4}.$$

(d) Sannolikheten är $\frac{X}{\binom{500}{6}}$, där X är antalet sätt att välja 6 böcker så att villkoret uppfylls. Det finns fyra olika sätt att uppfylla villkoret:
- tre böcker var från N och S,
- två böcker var från N och S, samt två övriga böcker
- en bok var från N och S samt fyra övriga böcker
- alla sex böcker från P, E och H.

Detta ger

$$X = \binom{100}{3}^2 + \binom{100}{2}^2 \binom{300}{2} + 100^2 \binom{300}{4} + \binom{300}{6}.$$

(e) Om det fanns minst sex exemplar av varje bok skulle svaret vara 500^6. Vi måste räkna bort de fall där man köper sex exemplar av samma bok, vilket kan göras på lika många sätt som det finna titlar, dvs på 500 sätt.
SVAR: $500^6 - 500$.

7. (a) Den första följden är inte grafisk ty det finns ett udda antal udda tal i den. Den andra följden är grafisk, se Figur L.1.

(b) i. Ett exempel på en Hamiltoncykel är

$$A \to B \to E \to H \to K \to J \to I \to F \to G \to D \to C \to A.$$

ii. Det finns åtta noder av udda gradtal. Sex av dessa kan paras ihop i tre kanter vars borttagning skulle lämna en graf med två noder av udda gradtal och därmed en Eulerväg. T.ex. låt oss ta bort kanterna $\{A,\, B\}$, $\{C,\, F\}$ och $\{H,\, K\}$. Den resulterande grafen har en Eulerväg mellan E och J, t.ex.

$$E \to B \to C \to A \to D \to C \to E \to F \to D \to G \to \dots$$
$$\dots \to F \to I \to E \to H \to I \to K \to J \to I \to G \to J.$$

(c) Eftersom C_1 är fullständig så är den delen av grannmatrisen entydigt bestämt. När det gäller C_2 så finns det 4! sätt att ordna noderna i cykeln, men det spelar ingen roll åt vilket håll vi går så det finns $4!/2 = 12$ möjligheter för denna del av matrisen. Det finns fyra möjligheter för C_3-delen, beroende på vilken av noderna $9 - 12$ som är förgreningspunkten. Därmed finns det totalt $12 \cdot 4 = 48$ möjligheter för grannmatrisen. En av dessa är

$$M = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&&&&&&&& \\ 1&0&1&1&&&&&&&& \\ 1&1&0&1&&&&&&&& \\ 1&1&1&0&&&&&&&& \\ &&&&0&1&0&1&&&& \\ &&&&1&0&1&0&&&& \\ &&&&0&1&0&1&&&& \\ &&&&1&0&1&0&&&& \\ &&&&&&&&0&1&1&1 \\ &&&&&&&&1&0&0&0 \\ &&&&&&&&1&0&0&0 \\ &&&&&&&&1&0&0&0 \end{pmatrix},$$

där alla de tomma platserna i M innehåller nollor.

8. Motsägelsebevis. Antag att det fanns en sådan graf G. I synnerhet skulle då G och G^c ha samma antal kanter. Men G och G^c har ingen gemensam kant och tillsammans utgör dem K_{50}. Alltså skulle G ha hälften så många kanter som K_{50}, vilket i synnerhet skulle medföra att K_{50} har ett jämnt antal kankter. Men $|E(K_{50})| = \binom{50}{2} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49$, vilket är ett udda tal - motsägelse !