Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2018-10-27 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anton Johansson, telefon: 5325 (alt. Peter Hegarty 070-5705475)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 21 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2018. Preliminärt så krävs 31 poäng för betyget 4 och 41 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 16 november. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. I uppgifter 1, 7, 8 så kan de olika deluppgifterna betraktas som helt oberoende av varandra. I uppgift 6 behöver man räkna ut svaret som ett explicit bas-10 tal *endast* i del (d).

Uppgifterna

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. Motivera väl ! (3p)
(Obs! $\oplus$ betecknar XOR).

$$\begin{array}{r} p \oplus (q \wedge s) \\ r \to \neg s \vee p \\ s \to r \\ \neg s \to \neg q \\ \hline \neg s \end{array}$$

(b) Låt universumet U bestå av alla män och betrakta följande argument: (3p)

$$\begin{array}{r} \text{Somliga IFK-Göteborg spelare kommer från Göteborg} \\ \text{Somliga IFK-Göteborg spelare heter Glenn} \\ \hline \text{Alla heter Glenn i Göteborg} \end{array}$$

Skriv argumentet i symbolisk logisk form (definiera alla predikaten tydligt !). Argumentet är uppenbarligen ogiltigt - illustrera detta med ett Euler-Venn diagram.

2. Låt $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \,\text{och}\, y \geq 0\}$. Låt $\mathcal{L}$ vara mängden av alla linjerna i $\mathbb{R}^2$ och definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{L}$ enligt följande: (3p)

$$\mathcal{R} = \{(L_1, L_2) \in \mathcal{L}^2 : L_1 \cap L_2 \cap \mathbb{R}^2_+ \neq \phi\}.$$

Vilken/vilka av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet har $\mathcal{R}$?

- I fall du hävdar att en egenskap gäller, motivera väl !

- Annars, ge ett specifikt motexempel.

Var god vänd!

3. Bevisa att för alla heltal $n \geq 2$ gäller (5p)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n^2}.$$

4. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (4.5p)

$$115x + 395y = 10000,$$

samt den lösning som minimerar $|x| + |y|$.

(b) Bestäm den allmänna lösningen samt den minsta positiva lösningen till systemet (3.5p)

$$79x \equiv 4 \pmod{23}, \quad x \equiv 1 \pmod{5}.$$

(5p)

5. (a) i. Bestäm $\Phi(396)$.

ii. Rita Hassediagrammet för den partiella ordningen $(D_{396}, |)$, där D_n betecknar mängden av alla positiva heltal som delar n.

(b) Beräkna $5^{2159} \pmod{396}$. (3p)

6. I Fågelriket finns det 10 politiska partier, bl.a. Hackfåglarnas Populära Front (HPF) och Demokratiska Fronten för Hackfåglar (DFH). Riksdagen består av 15 mandat som fördelas geografiskt, ett till var och en av 15 regioner.

(a) Om mandaten skulle fördelas bland partierna slumpmässigt, på hur många sätt kan detta ske om det spelar roll från vilka regioner partierna får sina mandat ? (1.5p)

(b) På hur många sätt kan mandaten fördelas om vi däremot endast tar hänsyn till hur många mandat varje parti får ? (1.5p)

(c) Under samma förutsättningar som i del (a), vad är sannolikheten att både HPF och DFH får exakt 5 mandat var och inget annat parti får mer än ett mandat ? (2p)

(d) I senaste riksdagsval fick HPF 4 mandat, DFH fick 3 mandat och alla övriga partier fick ett mandat vart. På hur många sätt kan man få ihop en regeringskoalition som tillsammans har 8 mandat, om HPF och DFH är bittra fiender som aldrig kan tänka sig regera ihop ? (2p)

7. För grafen G_1 i Figur 1,

(a) Har grafen en Eulerväg och/eller en Eulercykel ? Ange en sådan om den finns. (2p)

(b) Ange och rita fyra olika grupper av 4 noder så att kanterna mellan dessa bildar ett träd. (2p)

(c) Ange en isomorfi mellan G_1 och G_2, dvs numrera noderna i G_2 på ett lämpligt vis. Hur många olika isomorfier finns det mellan de två graferna ? Förklara väl ! (2p)

8. (a) För $n \geq 4$, låt $f(n)$ vara antalet permutationer av talen $1, 2, \ldots, n$ där minst 4 olika tal flyttas. Bestäm en formel för $f(n)$. (3p)

(b) För positiva heltal $n, k \in \mathbb{Z}_+$ låt $S(n, k)$ vara antalet sätt att partitionera mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$ i k st. icke-tomma delmängder. Bevisa att, för alla $n \geq k \geq 2$ gäller (4p)

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k).$$

Lycka till!