Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2019-08-30 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Juan Inda, telefon: 5325 (alt. Peter Hegarty 070-5705475)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 21 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2018. Preliminärt så krävs 31 poäng för betyget 4 och 41 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 20 september. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.
I uppgift 6 ska man för full poäng räkna ut svaret explicit *endast i deluppgift (c)*.

Uppgifterna

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. Motivera väl ! (3p)

$$\begin{array}{r} c \to a \vee b \\ c \vee (\neg a) \to \neg b \\ \neg a \to b \vee d \\ \neg c \to \neg d \\ \hline a \end{array}$$

(b) Skriv följande argument i symbolisk logisk form. Definiera universumet och alla predikaten *tydligt* ! (3p)

Ingen Arsenal spelare är en engelsman[1]
Alla Arsenal spelarna är usla
– –
Alla bra spelare är engelsmän

Är argumentet giltigt ? Motivera väl !
(Obs! Här ska “bra” tolkas som synonymt med “inte usel”. Förresten, det är inte längre sant att Arsenal har inga engelska spelare, men det var det för ett par år sedan. Det är förstås fortfarande sant att de är usla ...).

Var god vänd!

2. Låt (3p)

$$U = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}.$$

Låt $\mathcal{R}$ vara följande relation på U:

$$n_1 \mathcal{R}\, n_2 \Leftrightarrow \exists\, p : p \text{ är ett primtal och } p^2 \,|\, n_1 n_2.$$

Vilken/vilka av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet har $\mathcal{R}$? Motivera väl !

3. Låt talföljden $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ definieras rekursivt enligt

$$u_0 = u_1 = 1, \quad 2u_n = 7u_{n-1} - 6u_{n-2} + n \;\; \forall\, n \geq 2.$$

(a) Beräkna u_2 och u_3. (2p)

(b) Bevisa att för alla heltal $n \geq 0$ gäller (5p)

$$u_n = 2^{n+1} - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n + (n+5).$$

4. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (3p)

$$17x + 27y = 2000.$$

(b) Åpplen kostar 17 kr styck och apelsiner kostar 27 kr styck (det var dåligt skörd i år ...). Om man spenderar exakt 2000 kr på äpplen och apelsiner, ange (3p)

i. det minsta antalet äpplen man kan köpa

ii. det minsta antalet apelsiner man kan köpa

iii. det minsta antalet frukter man kan köpa

iv. antalet olika sätt att spendera pengarna.

5. (a) För vilka $b \in \mathbb{Z}$ är systemet (1p)

$$3x \equiv 2 \pmod{7}, \quad 6x \equiv b \pmod{15}, \quad 7x \equiv 1 \pmod{11}$$

av kongruenser lösbart ?
(Obs! Det räcker med rätt svar, ingen motivering behövs).

(b) För $b = 9$ bestäm både den allmänna och den största negativa lösningen till systemet. (4p)

6. *Ord* i följande uppgifter betyder en valfri konkatenation av bokstäver. Det måste inte betyda något i något riktigt språk.

(a) Hur många 9-bokstävers ord kan man göra av bokstäverna i LIVERPOOL ? (1.5p)

(b) I hur många av dessa ord är intilliggande bokstäver alltid olika ? (1.5p)

(c) Om man väljer 5 av de 9 bokstäverna slumpmässigt, vad är sannolikheten att man väljer fler konsonanter än vokaler ? (Obs! Ordningen i vilken bokstäverna väljs är oväsentligt här.) (2p)

(d) Hur många 10-bokstävers ord kan man göra av bokstäverna i LIVERPOOL samt en valfri engelsk bokstav till ? (2p)

(e) Vad är koefficienten för $l^{16} i^7 v^9 e^4 r^2$ i utvecklingen av $(l + i + v + e + r)^{38}$? (1p)

Var god vänd!

7. Man hänvisas till Figur 1.

(a) För grafen G_1 ange exempel på följande eller förklara varför inga finns: (3p)

i. en Hamiltonväg
ii. en Hamiltoncykel
iii. en Eulerväg
iv. en Eulercykel.

(b) Också för grafen G_1, (3p)

i. Skriv upp dess grannmatris M
ii. Bestäm talet i position (1, 6), dvs rad 1 och kolumn 6, i matrisen M^5.

(c) Är G_1 isomorf med G_2 ? Motivera svaret väl ! (1p)

8. Bevisa att om G är en enkel graf med n noder och strängt fler än $\frac{n^2}{4}$ kanter att G inte kan vara bipartit. (3p)

9. Alice och Bob är på en fest tillsammans med tre andra gifta par. När alla anländer till festen så skakar vissa hand med varandra. Ingen skakar hand med sig själv eller sin partner och inga två skakar hand mer än en gång. (5p)

Efteråt frågar Alice var och en av de övriga sju gästerna (inklusive Bob) hur många personer de skakade hand med och får sju olika svar.

(a) Hur många personer skakade Alice hand med under festen ? Hur många skakade Bob hand med ?

(b) Formulera och bevisa en generalisering av resultatet till fallet då det finns n st par på festen, för ett godtyckligt $n \geq 2$.

Förklara ditt resonemang *tydligt* !

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/DI2, 190830

1. (a) Argumentet är giltigt - vi för ett motsägelsebevis. Antag att slutsatsen är falsk, så $a = 0$, och alla hypoteserna sanna. Enligt H3 så måste antingen $b = 1$ eller $d = 1$. Men $\neg a = 1$ så enligt H2 är $\neg b = 1$, dvs $b = 0$. Därmed måste $d = 1$ gälla. Men då är $\neg d = 0$ så enligt H4 måste även $\neg c = 0$, dvs $c = 1$. I sin tur medför nu H1 att antingen $a = 1$ eller $b = 1$, vilket motsäger det vi redan kommit fram till, nämligen att $a = b = 0$ (och $c = d = 1$).

(b) Låt universumet U bestå av alla aktiva professionella fotbollspelare. Vi definierar följande tre predikat:

$A(x):$ x spelar för Arsenal,
$E(x):$ x är en engelsman,
$U(x):$ x är usel.

Argumentet lyder då:

$$\begin{array}{r} \forall\, x: \quad A(x) \to \neg E(x) \\ \forall\, x: \quad A(x) \to U(x) \\ \hline \forall\, x: \quad \neg U(x) \to E(x) \end{array}$$

Argumentet är uppenbarligen ogiltigt ty hypoteserna utesluter inte att det finns bra icke-engelska spelare, så länge de inte spelar för Arsenal. (Och sådana finns ju, t.ex.: Mané, Firmino, Salah, Origi, Shaqiri, Fabinho, Wijnaldum, Matip, van Dijk, Robertson, Alisson !!)

2. *Reflexivitet*: Ja. För varje heltal $n \geq 2$ finns det minst ett primal p sådant att $p \mid n$. Och då kommer $p^2 \mid n^2$, vilket innebär att $n\,\mathcal{R}\,n$.
Symmetri: Ja, trivialt, ty $n_1 n_2 = n_2 n_1$ (heltalsmultiplikation är kommutativ).
Transitivitet: Nej. T.ex. bektrakta $n_1 = 2$, $n_2 = 4$, $n_3 = 3$. Då gäller att 2^2 delar både $n_1 n_2 = 8$ och $n_2 n_3 = 12$, men $n_1 n_3 = 2 \cdot 3$ är inte delbart med något kvadrattal.

3. (a)

$$n = 2: \quad 2u_2 = 7u_1 - 6u_0 + 2 = 7 - 6 + 2 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{3}{2},$$
$$n = 3: \quad 2u_3 = 7u_2 - 6u_1 + 3 = 7\left(\frac{3}{2}\right) - 6 + 3 = \frac{15}{2} \Rightarrow u_3 = \frac{15}{4}.$$

(b) Vi bevisar formeln via induktion.

Steg 1: Basfallen $n = 0$, 1 måste kontrolleras:

$$n = 0: \quad 2^{0+1} - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0 + (0 + 5) = 2 - 6 + 5 = 1 = u_0,$$
$$n = 1: \quad 2^{1+1} - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^1 + (1 + 5) = 4 - 9 + 6 = 1 = u_1.$$

Steg 2: Induktionssteget. Stark induktion behövs så antag, för något $n \geq 1$, att

$$u_k = 2^{k+1} - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k + (k + 5), \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Vi vill härleda att

$$u_{n+1} = 2^{n+2} - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + (n + 6). \tag{2}$$

Vi har enligt rekursionen:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left[7u_n - 6u_{n-1} + (n+1)\right]$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left[7\left(2^{n+1} - 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n + (n+5)\right) - 6\left(2^n - 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + (n+4)\right) + (n+1)\right]$$

$$= 2^n\left(\frac{7\cdot 2}{2} - \frac{6}{2}\right) - 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{2} + \frac{6}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right) + \frac{1}{2}\left(7(n+5) - 6(n+4) + (n+1)\right)$$

$$= 2^n\cdot 4 - 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}(2n+12) = 2^{n+2} - 6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + (n+6), \quad \text{v.s.v.}$$

4. (a) Vi kör Euklides på paret (27, 17). Först framåt:

$$\begin{aligned} 27 &= 17 + 10, \\ 17 &= 10 + 7, \\ 10 &= 7 + 3, \\ 7 &= 2\cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

Så SGD(27, 17) $= 1$ (vilket iofs var uppenbart redan från början) och den Diofantiska ekvationen har en lösning. Nu fortsätter vi med Euklides bakåt:

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 2\cdot 3 \\ &= 7 - 2(10 - 7) \\ &= 3\cdot 7 - 2\cdot 10 \\ &= 3(17 - 10) - 2\cdot 10 \\ &= 3\cdot 17 - 5\cdot 10 \\ &= 3\cdot 17 - 5(27 - 17) \\ &= 8\cdot 17 - 5\cdot 27. \end{aligned}$$

Alltså,

$$8\cdot 17 - 5\cdot 27 = 1. \tag{3}$$

Multiplicera igenom med 2000 så har vi vår baslösning

$$x_0 = 16000, \qquad y_0 = -10000.$$

Den allmänna lösningen lyder

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \left(\frac{b}{d}\right)n = 16000 - 27n, \\ y &= y_0 + \left(\frac{a}{d}\right)n = -10000 + 17n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(b) Om x och y ska representera antalet köpta äpplen resp. apelsiner så måste båda vara icke-negativa.

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Leftrightarrow 27n \leq 16000 \Leftrightarrow n \leq 592, \\ y \geq 0 &\Leftrightarrow 17n \geq 10000 \Leftrightarrow n \geq 589. \end{aligned}$$

Det finns alltså 4 olika sätt att spendera pengarna, svarande mot $n = 589,\ 590,\ 591,\ 592$. Motsvarande $(x,\ y)$-värdena beräknas lätt och blir:

$$(97,\ 13), \quad (70, 30), \quad (43,\ 47), \quad (16,\ 64).$$

Det minsta antalet äpplen man kan köpa är därmed 16 st, det minsta antalet apelsiner är 13 st och det minsta antalet frukter är $16 + 64 = 80$ st.

5. (a) Systemet är lösbart om och endast om b är en multipel av $3 = \text{SGD}(6, 15)$.

(b) Om $b = 9$ kan vi först dela ut $\text{SGD}(6, 9, 15) = 3$ från hela den andra kongruensen och få den ekvivalenta kongruensen $2x \equiv 3 \pmod 5$.

Som nästa steg förenklar vi systemets utseende enligt:

$$\begin{aligned} 3x \equiv 2 \pmod 7 &\Leftrightarrow x \equiv 3^{-1} \cdot 2 \equiv 5 \cdot 2 \equiv 10 \equiv 3 \pmod 7, \\ 2x \equiv 3 \pmod 5 &\Leftrightarrow x \equiv 2^{-1} \cdot 3 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \equiv -1 \pmod 5, \\ 7x \equiv 1 \pmod{11} &\Leftrightarrow x \equiv 7^{-1} \equiv 8 \equiv -3 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Nu tillämpar vi den Kinesiska Restsatsen och får den allmänna lösningen:

$$x \equiv 3 \cdot b_1 \cdot 5 \cdot 11 - 1 \cdot b_2 \cdot 7 \cdot 11 - 3 \cdot b_3 \cdot 7 \cdot 5 \pmod{7 \cdot 5 \cdot 11}, \tag{4}$$

där

$$\begin{aligned} 55b_1 \equiv 1 \pmod 7 &\Rightarrow \text{tag } b_1 = -1, \\ 77b_2 \equiv 1 \pmod 5 &\Rightarrow \text{tag } b_2 = -2, \\ 35b_3 \equiv 1 \pmod{11} &\Rightarrow \text{tag } b_3 = 6. \end{aligned}$$

Insättning in i (4) ger

$$x \equiv -3 \cdot 5 \cdot 11 + 2 \cdot 7 \cdot 11 - 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 \equiv -165 + 154 - 630 \equiv -641 \equiv -385 - 256 \equiv -256 \pmod{385}.$$

6. (a) Det finns 2 st O samt 2 st L, så antalet olika ord är $\frac{9!}{(2!)^2}$.

(b) Här kan vi subtrahera från svaret i (a) antalet ord där det förekommer antingen LL eller OO. Om det t.ex. förekommer LL så kan vi betrakta LL som en enda bokstav, vilket innebär att vi kan tänka oss att vi har 8 bokstäver att permutera, varav två är O. Så antalet sådana ord är $\frac{8!}{2!}$. På samma sätt finns det $\frac{8!}{2!}$ ord där OO förekommer och 7! ord där både LL och OO förekommer.

Enligt sållprincipen finns det därmed $2 \cdot \frac{8!}{2!} - 7! = 8! - 7!$ ord där antingen LL eller OO förekommer, så svaret på (b) blir $\frac{9!}{(2!)^2} - 8! + 7!$.

(c) Det finns $\binom{9}{5}$ sätt att välja 5 bokstäver. Om det ska väljas fler konsonanter än vokaler så har vi följande alternativ:

- 3 konsonanter och 2 vokaler $\Rightarrow \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2}$ möjligheter,
- 4 konsonanter och 1 vokal $\Rightarrow \binom{5}{4} \cdot \binom{4}{1}$ möjligheter,
- 5 konsonanter och inga vokaler $\Rightarrow \binom{5}{5} \cdot \binom{4}{0}$ möjligheter.

Sannolikheten att vi väljer fler konsonanter än vokaler är därmed

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{4}{2} + \binom{5}{4}\binom{4}{1} + \binom{5}{5}\binom{4}{0}}{\binom{9}{5}} = \frac{10 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 1 \cdot 1}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \cdots = \frac{81}{126} = \frac{9}{14}.$$

(d) Givet den 10:e bokstaven, antalet möjliga ord beror på huruvida denna bokstav förekom redan i LIVERPOOL. Detta ger följande fall:

Fall 1: Den 10:e bokstaven förekommer inte i LIVERPOOL. I så fall finns det 19 val för den sista bokstaven och vi har fortfarande två dubletter, så antalet möjliga ord är $19 \times \frac{10!}{(2!)^2}$.

Fall 2: Den 10:e bokstaven är antingen I, V, E, R eller P. I så fall har vi nu tre dubletter så antalet möjliga ord är $5 \times \frac{10!}{(2!)^3}$.

Fall 3: Den 10:e bokstaven är antingen L eller O. I så fall har vi nu en dublett och en triplett så antalet möjliga ord är $2 \times \frac{10!}{2!\,3!}$.

Svar: $19 \times \frac{10!}{(2!)^2} + 5 \times \frac{10!}{(2!)^3} + 2 \times \frac{10!}{2!\,3!}$.

(e) Svaret ges direkt av multinomialsatsen: $\frac{38!}{16!\,7!\,9!\,4!\,2!}$.

7. (a) i. Ett exempel på en Hamiltonväg är

$$1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 7 \to 5 \to 6 \to 8.$$

ii. Det finns inga Hamiltoncykler. Antag att man börjar i nod 1 t.ex. En Hamiltoncykel måste också sluta där. Men om alla noderna ska besökas blir det då oundvikligt att kanten $\{2,\, 7\}$ korsas två gånger och därmed att noderna 2 och 7 besöks två gånger.

iii. Ett exempel på en Eulerväg är

$$3 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 2 \to 7 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8 \to 6.$$

iv. Det finns ingen Eulercykel ty noderna 3 och 6 har udda gradtal.

(b) i.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii. Vi söker antalet vägar av längd 5 från nod 1 till nod 6. Först notera att en sådan väg måste använda kanten $e = \{2,\, 7\}$. Dessutom måste denna kant användas ett udda antal gånger för annars skulle vi hamna på samma “sida” av grafen som där vi började.
Fall 1: e används tre gånger. Enda möjligheten då är vägen $1 \to 2 \to 7 \to 2 \to 7 \to 6$.
Fall 2: e används en gång, som steg 2 av 5. Enda möjligheten i så fall är $1 \to 2 \to 7 \to 6 \to 7 \to 6$.
Fall 3: e används en gång, som steg 3 av 5. I så fall måste de två första stegen vara $1 \to 3 \to 2$ men vi har två möjligheter för de två sista stegen: $7 \to 5 \to 6$ eller $7 \to 8 \to 6$.
Fall 4: e används en gång, som steg 4 av 5. I så fall måste sista steget vara $7 \to 6$. Vi ska ta oss från 1 till 2 på tre seg, vilket ger följande alternativ: $1 \to 2 \to 1 \to 2$ eller $1 \to 2 \to 3 \to 2$ eller $1 \to 2 \to 4 \to 2$ eller $1 \to 3 \to 4 \to 2$.

Sammanlagt finns det alltså $1 + 1 + 2 + 4 = 8$ möjliga vägar.

(c) Nej. T.ex. G_1 har fyra trianglar (dvs K_3 delgrafer) medan G_2 har bara två st.

8. Antag att G är bipartit. Då finns det en uppdelning av dess noder $V(G) = X \sqcup Y$, där $|X| = r$, $|Y| = n - r$ för något $1 \le r \le n - 1$, sådan att varje kant i G går mellan en nod i X och en nod i Y. Detta innebär att antalet kanter inte kan överstiga $r(n - r)$. Sätt $f(r) = r(n - r)$, där vi betraktar nu r som en reell variabel, och notera att $f'(r) = 0$ då $r = n/2$. Det innebär att $f(r)$ har ett maximum i $r = n/2$, så antalet kanter i G kan inte överstiga $(n/2)^2 = n^2/4$, v.s.v.

9. Det allmänna resultatet är följande:

Om det finns n st par på festen, inklusive paret Alice-Bob, och Alice får $2n - 1$ olika svar då hon frågar de andra deltagarna hur många de skakade hand med, så måste både Alice och Bob ha skakat hand med $n - 1$ personer.

Vi kan bevisa detta via induktion på n.

STEG 1: Vi kontrollerar basfallet $n = 2$. I så fall fanns det ett par förutom Alice-Bob, säg Caroline-David. Alice frågar Bob, Caroline och David hur många de skakade hand med och får tre olika svar. Eftersom ingen skakar hand med varken sig själv eller sin partner, och det finns totalt 4 personer på festen, så har varje person skakat hand med högst 2 personer. De svaren Alice fick måste därmed vara 0, 1 och 2. Det innebär i synnerhet att det finns någon som skakade hand med ingen och någon som skakade hand med båda i det andra paret. Dessa två måste därför utgöra ett par själva, dvs vara Caroline och David. Svaret 1 måste därför ha kommit från Bob. Dessutom har exakt en av Caroline och David skakat hand med Alice. Så vi har bevisat att både Alice och Bob skakade hand med $1 = 2 - 1$ personer, v.s.v.

STEG 2: Antag att $n \geq 3$ och att satsen gäller för $n-1$ par. Nu har vi totalt $2n$ personer på festen och ingen skakar hand med varken sig själv eller sin partner, så varje person skakar hand med högst $2n-2$ personer. De $2n-1$ olika svaren som Alice fick måste därmed vara $0, 1, 2, \ldots, 2n-2$. I synnerhet finns det någon som skakade hand med ingen och någon som skakade hand med alla $2n-2$ personerna förutom sig själv och sin partner. Dessa två måste utgöra ett par själva.

Vi kan nu tänka oss att vi tar bort detta par och alla deras handskakningar. Nu har vi kvar $2n-2$ personer, dvs $n-1$ par, och om Alice hade frågat de övriga hur många de skakade hand med, förutom i det paret som togs bort, så hade hon fått $2n-3$ olika svar, nämligen $0, 1, \ldots, 2n-4$. Per induktion kan vi härleda att både Alice och Bob skakade hand med $n-2$ personer bland de återstående gästerna. Dessutom har båda skakat hand med en person i paret som togs bort, ty denna skakade hand med alla förutom sig själv och sin partner. Därmed har både Alice och Bob skakat hand med $n-1$ personer totalt, v.s.v.