Tentamen
Introduktionskurs, D

2018-09-01 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Andreas Petersson(ordinarie), telefon: x5325 . Peter Hegarty: 070-570 54 75

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs preliminärt 20 poäng. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 15 september . Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Uppgifter

1. Definiera följande mängder:

$$A = \{1,\ \{2\}\} \qquad B = \{\{1\},\ 2\} \qquad C = \{1,\ 2,\ 3\}.$$

Skriv ut följande mängder med korrekt notation, så att man tydligt ser vilka element som ingår. Ingen motivering krävs för denna uppgift, men var noggrann. (8p)

(a) $B \cap C$

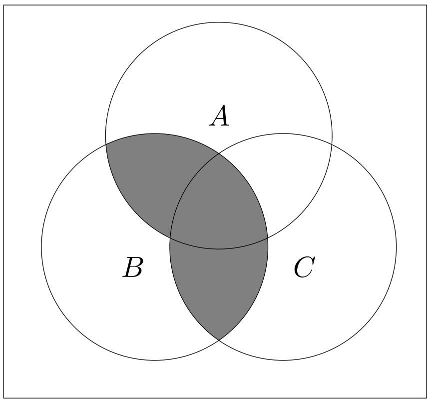
(b) $A \setminus C$

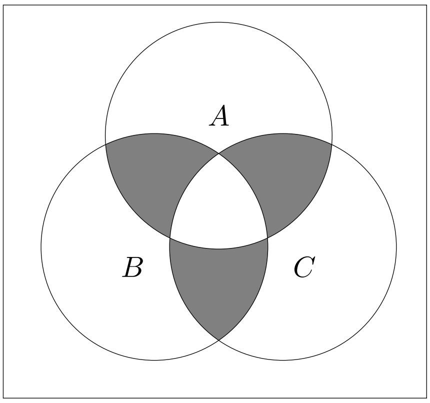
(c) $A \cap B$

(d) $A \cap \mathcal{P}(B)$

där $\mathcal{P}(C)$ betecknar potensmängden av C, det vill säga mängden av alla delmängder.

2. Ge varsitt uttryck för följande mängder i termer av unioner, snitt, differenser och/eller komplement.

(a) 

(b) 

(5p)

Var god vänd!

3. Är det sant att

$$(B \cap C) \setminus A = \left(B^C \cup C^C \cup A\right)^C$$

för vilka mängder A, B och C som helst? Använd gärna Venndiagram om du vill, men motivera svaren väl! (5p)

4. (a) Definiera följande funktioner: (Vi använder beteckningen $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, och antar att 0 ingår som element i $\mathbb{N}$.)

$$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \qquad f_2 \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \qquad f_3 \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$x \mapsto 1 + x^2, \qquad x \mapsto \sqrt{x} \qquad (a,\ b) \mapsto a + b.$$

För var och en av funktionerna f_1, f_2 och f_3, avgör om funktionen är surjektiv, injektiv och/eller bijektiv, samt ange funktionens invers om den existerar. Motivera alla påståenden väl! (9p)

(b) Skriv formler för sammansättningarna $f_1 \circ f_2$ och $f_2 \circ f_1$. (2p)

(c) Ändra definitionsmängden för funktionen f_1 från (a)-delen så att funktionen blir injektiv. Bestäm sedan inversfunktionen. Ange inversfunktionens definitionsmängd och målmängd. (3p)

5. (a) Beräkna

$$\sum_{k \in \{-1, 1, 2, 3, 6, \frac{1}{2}\}} \frac{1}{k}.$$

(3p)

(b) Skriv följande summa med hjälp av summasymbolen Σ.

$$2 + 5 + 10 + 17 + 26 + ... + 442$$

(3p)

(c) Lista elementen i följande mängd

$$\{1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 30\} \setminus \left(\bigcup_{k=2}^{10} A_k \right)$$

där vi för varje k definierar $A_k = \{x : x \text{ är ett positivt heltal delbart med } k \text{ och } x \leq 30\}$. (4p)

6. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = 3x + 2$ och, för varje $(c,\ d) \in \mathbb{R}^2$, låt $g_{c,d}(x) = cx + d$.

(a) Låt $A = \{(c,\ d) \in \mathbb{R}^2 \mid f \circ g_{c,d} = g_{c,d} \circ f\}$. Beskriv mängden A geometriskt. (4p)

(b) Skriv en formel för $f^{2018}(x)$.
(OBS! $f^{2018} = f \circ f \circ f \circ ... \circ f$, 2018 gånger.) (4p)

Lycka till!

Lösningar till Intromatte D, 2017-09-01

1. (a) $B \cap C = \{2\}$

(b) $A \backslash C = \{\{2\}\}$

(c) $A \cap B = \emptyset$

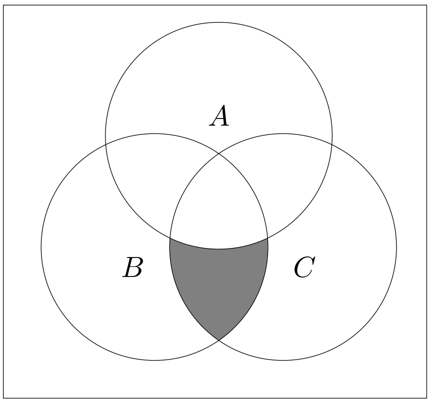
(d) $A \cap \mathcal{P}(B) = \{\{2\}\}$

2. Flera svar är möjliga. Exempel på svar är:

(a) $B \cap (A \cup C)$

(b) $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$

3. Det är sant. Bägge mängderna kan illustreras med följande Venndiagram:



Det finns flera sätt att komma fram till diagrammet ovan, men för åtminstone högerledet bör diagrammet byggas upp i flera steg.

Som en alternativ "algebraisk" lösning kan man använda de räknelagar för mängder som kallas för *dubbelt komplement* och *deMorgan* på s.45 i boken, samt sista raden i den tabellen. Om vi börjar med högerledet så kan vi räkna såhär:

$$\begin{aligned}(B^c \cup C^c \cup A)^c &\overset{\text{deMorgan}}{=} (B^c)^c \cap (C^c)^c \cap A^c \\ &\overset{\text{dubb. kom.}}{=} B \cap C \cap A^c \\ &= (B \cap C) \cap A^c \\ &\overset{\text{sista raden}}{=} (B \cap C) \backslash A, \quad \text{v.s.v.}\end{aligned}$$

4. (a) $x^2 \geq 0$ för alla element $x \in \mathbb{R}$, så vi kan aldrig få $f_1(x) < 1$. Till exempel kan vi inte få ut $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ur funktionen. f_1 är alltså inte surjektiv.
Vi kan få ut samma värde med olika argument, till exempel har vi $f_1(1) = f_1(-1)$, så f_1 är inte injektiv.
Då bijektivitet kräver både surjektivitet och injektivitet är f_1 inte bijektiv och har därför ingen invers.

Funktionen $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ är en invers till f_2, ty $g \circ f_2(y) = f_2 \circ g(y) = y$ för alla $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Då vi har en invers är f_2 bijektiv, och därmed även surjektiv och injektiv.

Vi kan få ut vilket element $t \in \mathbb{N}$ som helst ur f_3 genom att välja argumentet $(t, 0)$, så f_3 är surjektiv.
Vi kan få ut samma värde med olika argument, till exempel har vi $f_3(0, 1) = 1 = f_3(1, 0)$, så f_3 är inte injektiv.
Då bijektivitet kräver både surjektivitet och injektivitet är f_3 inte bijektiv och har därför ingen invers.

(b)

$$\begin{aligned}(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = 1 + (f_2(x))^2 = 1 + (\sqrt{x})^2 = 1 + x,\\ (f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x)) = \sqrt{1 + x^2}.\end{aligned}$$

(c) Ett sätt är att sätta definitionsmängden till $\mathbb{R}_{\geq 0}$, och målmängden till $[1, \infty)$. Funktionen

$$\begin{aligned} g \colon [1, \infty) &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

blir då en invers till den nya funktionen. Om vi kallar den nya funktionen f_{1*} har vi att $f_{1*}(g(s)) = 1 + (\sqrt{s-1})^2 = 1 + s - 1 = s$ för alla $s \in [1, \infty)$ och $g(f_{1*}(t)) = \sqrt{(t^2+1)-1} = \sqrt{t^2} = t$ för alla $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, och vi ser att g verkligen är en invers.

5. (a) Skriver vi ut summan ser vi att

$$\frac{1}{-1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{1/2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} + 2 = \frac{6}{6} + 2 = 1 + 2 = 3.$$

Notera att de första två termerna tar ut varandra.

(b)

$$\sum_{k=1}^{21} (k^2 + 1).$$

(c) Vi börjar med mängden $\{1, 2, ..., 30\}$ och tar bort alla tal som är delbara med något av talen 2, 3, ..., 10. Kvar blir då talet 1 samt alla primtal mellan 10 och 30, det vill säga mängden $\{1, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$.

6. (a) Vi har

$$\begin{aligned} (f \circ g_{c,d})(x) &= f(g_{c,d}(x)) = 3g_{c,d}(x) + 2 = 3(cx + d) + 2 = 3cx + (3d + 2), \\ (g_{c,d} \circ f)(x) &= g_{c,d}(f(x)) = cf(x) + d = c(3x + 2) + d = 3cx + (2c + d), \end{aligned}$$

vilket innebär att de två funktionerna är identiska om och endast om $3d + 2 = 2c + d$, dvs $d = c - 1$. Mängden av alla $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller $d = c - 1$ utgör en linje, mer precis linjen genom punkterna $(0, -1)$ och $(1, 0)$ i (c, d)-planet.

(b) Det gäller för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ att

$$f^n(x) = 3^n x + (3^n - 1),$$

vilket kan bevisas t.ex. via induktion på n (jag utelämnar det fullständiga beviset här, vi kommer till induktionsbevis i Kapitel 4 i boken). I synnerhet har vi att

$$f^{2018}(x) = 3^{2018} x + (3^{2018} - 1).$$