Inledande diskret matematik D1/DI2, HT2018
Extra demouppgifter 4/10

Uppgift 1 (ej demo): Bevisa att den Diofantiska ekvationen $x^2 - 3y^2 = 2$ saknar lösning.

Lösning: Modulo 3 säger ekvationen att $x^2 \equiv 2$. Men för en heltalskvadrat gäller att $x^2 \equiv 0 \vee 1 \pmod 3$, så det finns inga heltalslösningar.

Uppgift 2: Bevisa att det finns oändligt många positiva heltal $n \in \mathbb{N}$ för vilka den Diofantiska ekvationen $x^2 + y^2 + z^2 = n$ saknar lösning. (TIPS: Tänk modulo 8).

Lösning:

Uppgift 3: **(i)** Låt $n \in \mathbb{Z}_+$ och låt $a,\, b,\, c \in \mathbb{Z}$ sådant att SGD$(a,\, n) = 1$. Bevisa att

$$ab \equiv ac \pmod n \quad \Rightarrow \quad b \equiv c \pmod n. \tag{1}$$

OBS! Detta kallas för *kancellationslagen i* $\mathbb{Z}_n$.
(ii) Ge ett exempel som visar att (1) inte alltid gäller om SGD$(a,\, n) > 1$.
(iii) Låt $n \in \mathbb{Z}_+$ och låt $a,\, b \in \mathbb{Z}$. Bevisa att

$$[\text{SGD}(a,\, n) = 1] \wedge [\text{SGD}(b,\, n) = 1] \;\Rightarrow\; \text{SGD}(ab,\, n) = 1. \tag{2}$$

(iv) Med hjälp av (1) och (2), bevisa Eulers sats.

Lösning: **(iv)** Följ bokens bevis. Kan du se var (1) och (2) används ?