Lösningsförslag till tenta 2006-12-21
Linjär algebra D

Uppgift 1. Låt v vara vektorn från origo O - som ligger i planet - till punkten P, alltså $v = (3,2,1)$. Låt vidare v' vara vektorn från O till P'. Observera att v' och P' har samma koordinater. Rita figur!

En normal till planet är $n = (1,2,2)$. Kalla v:s ortogonalprojektion mot n för v_n

$$v_n = \frac{(u \cdot n)}{|n|^2} n = (1,2,2)$$

Ur sambandet $v' = v - 2v_n$ fås $v' = (1,-2,-3)$. Mittpunkt på sträckan PP' blir $(P+P')/2 = (2,0,-1)$, vilken ligger i planet som den ju bör.
Svar: $P' : (1,-2,-3)$

Uppgift 2. Vektorerna $u = (3,4,2) - (3,2,1) = (0,2,1)$ och $v = (4,1,1) - (3,2,1) = (1,-1,0)$ är båda parallella med planet, vars normal därför fås ur

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = e_1 + e_2 - 2e_3 = (1,1,-2)$$

En godtycklig punkt $(x,y,z) \in \pi$ precis då exempelvis vektorn $(x-3, y-2, z-1)$ är vinkelrät mot planets normal $n = (1,1,-2)$. Detta ger ekvationen

$$(x-3, y-2, z-1) \cdot (1,1,-2) = 0 \quad \Leftrightarrow x + y - 2z - 3 = 0$$

Sätt $\ell(x,y,z) = x + y - 2z - 3$, då ges avståndet från punkten $(1,1,2)$ av

$$\frac{|\ell(1,1,2)|}{|n|} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

Svar: Planets ekvation är $x + y - 2z - 3 = 0$ och sökt avstånd blir $5/\sqrt{6}$

Uppgift 3. Vi får direkt ur den geometriska definitionen av skalärprodukt att $u \cdot u = 16$, $v \cdot v = 25$ och $u \cdot v = 4 \cdot 5 \cos([u,v]) = 16$. Vi beräknar $\vec{w_1} \cdot \vec{w_2}$ på två sätt enligt nedan

$$\vec{w_1} \cdot \vec{w_2} = (u+v) \cdot (v-u) = v \cdot v - u \cdot u = -9$$

$$\vec{w_1} \cdot \vec{w_2} = |\vec{w_1}||\vec{w_2}| \cos([\vec{w_1}, \vec{w_2}])$$

$$|\vec{w_1}|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = 73 \quad , \quad |\vec{w_2}|^2 = (u-v) \cdot (u-v) = 9$$

Vi har nu således likheten $\sqrt{73} \cdot 3 \cos([\vec{w_1}, \vec{w_2}]) = -9$.
Svar: $\cos([\vec{w_1}, \vec{w_2}]) = -3/\sqrt{73}$

Uppgift 4. Vi använder naturligtvis Gausselimination med första ekvationen som pivotrad

$$\left\{ \begin{aligned} x + 2y + az &= 2a \\ -x - y + 2az &= 12 \\ -2x + ay + 8z &= 16 \end{aligned} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} x + 2y + az &= 2a \\ y + 3az &= 12 + 2a \\ (a+4)y + 2(a+4)z &= 4(a+4) \end{aligned} \right.$$

Vi ser att uttrycket $a + 4$ lika med noll eller skilt från noll är betydelsefullt.

(a) **Fall:** $a = -4$
Den sista ekvationen blir nu $0 \cdot z = 0$, varför z blir godtycklig

$$(x, y, z) = (-16 - 20t, 4 + 12t, t) \ , \ t \in R$$

Svar: För $a = -4$ blir skärningen en rät linje.

(b) **Fall:** $a \neq -4$
Förkorta bort faktorn $a + 4$ i sista ekvationen

$$\begin{cases} x + 2y + az = 2a \\ \quad y + 3az = 12 + 2a \\ \quad y + 2z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + az = 2a \\ \quad y + 3az = 12 + 2a \\ \quad (2 - 3a)z = -2(a + 4) \end{cases}$$

Vi ser att för $a \neq \frac{2}{3}$ fås en entydig punkt. För $a = \frac{2}{3}$ blir sista ekvationen $0 \cdot z = -28/3$, vilken saknar lösning.
Svar: För $a = \frac{2}{3}$ saknas skärningspunkt.

Uppgift 5a Vi ser nästan direkt att $Ax = -5x$, dvs att -5 är egenvärde med egenvektor x. Vi bildar nu den karakteristiska ekvationen

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda - 35 = 0$$

och kontrollerar naturligtvis genast att just -5 blir en rot.

Vi skall nu dividera $p(\lambda)$ med $\lambda + 5$

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda - 35 = (\lambda + 5)(\lambda^2 + a\lambda - 7),$$

där identifikation av koefficienten i vänster- och högerled för λ^2 ger sambandet $5 = a + 5$, alltså $a = 0$.
Svar: Egenvärdena är -5, $-\sqrt{7}$ och $\sqrt{7}$.

Uppgift 5b Enklast löses nog uppgiften genom att avbilda den elliptiska skivan på en cirkelskiva.

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2 = (x_1^2 + 2x_2)^2 + 3x_2^2 = 1$$

Sätt nu $x_1' = x_1 + 2x_2$ och $x_2' = \sqrt{3}x_2$ eller med matrisbeteckningar

$$x' = Ax \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad , \quad det(A) = \sqrt{3}$$

Uttryckt i x'_1 och x'_2 blir sambandet $x'^2_1 + x'^2_2 = 1$. Arean av bilden(cirkelskivan) är lika med $det(A) \cdot$ arean av ursprunget(ellipsskivan).
Svar: $\pi/\sqrt{3}$