Lösningsförslag till tenta 2007-12-20
Linjär algebra D

Uppgift 1.

(a) I planets ekvation skall vi sätta in $x = 1 + 2t$, $y = a + 3t$ och $z = 5t$

$$2(1 + 2t) - 3(a + 3t) + 5t = 2 - 3a = 0$$

Således måste $a = 2/3$.
Svar: $a = \frac{2}{3}$.

(b) Mittpunkten till de givna punkterna blir $M : (1, 2, 2)$.
Normal till planet $n = (4, 1, 3) - (-2, 3, 1) = (6, -2, 2) = 2(3, -1, 1)$. Låt nu $P : (x, y, z)$ vara en godtycklig punkt i planet, då kan dess ekvation skrivas $\vec{MP} \cdot n = 0$ eller

$$(3, -1, 1) \cdot (x - 1, y - 2, z - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y + z - 3 = 0$$

Svar: Planets ekvation är $3x - y + z - 3 = 0$.

Uppgift 2. Låt ortsvektorn för punkten heta $v = (4, 1, 0)$ och planets normal

$n = (2, 1, 2)$. Eftersom planet går genom origo ortogonalprojicerar vi v på n och får

$$v_n = \frac{v \cdot n}{|n|^2} n = (2, 1, 2)$$

Rita figur!

(a) Vi får direkt (med hjälp av figuren)

$$v_{proj} = v - v_n = (2, 0, -2)$$

Satisfierar motsvarande punkt planets ekvation?

Svar: Punkten $(4, 1, 0)$ projiceras på $(2, 0, -2)$

(b)

$$v_{speg} = v - 2v_n = (0, -1, -4)$$

Svar: Punkten $(4, 1, 0)$ speglas på $(0, -1, -4)$

Uppgift 3. Låt sidorna ges av vektorerna u och v med $|u| = |v|$. Diagonalerna ges av $u + v$ och$u - v$ och vi skall visa att dessa vektorer är ortogonala

$$(u + v) \cdot (u - v) = |u|^2 - u \cdot v + v \cdot u - |v|^2 = 0$$

Uppgift 4. Matrisen A är ej inverterbar precis då $det(A) = 0$. Med t ex Sarrus regel fås

$$det(A) = 4a - 2a - 4 = 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Vi bestämmer nollrummet i detta fall genom att lösa det homogena systemet $Ax = 0$. Gausselimination ger snabbt att $x = t(1, 2, -1)^T$, där t är en godtycklig parameter.
Svar: För $a = 2$ är nollrummet$=\{t(1, 2, -1) : t \in R\}$ i annat fall består nollrummet endast av nollvektorn.

Uppgift 5.

(a) Vi ger här endast svaret. Egenvärdena är -1 och 1 med egenvektorer exempelvis $(3, 1)^T$ och $(2, 1)^T$.

(b) Inför matriserna

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi har då $A = TDT^{-1}$ och även $A^k = TD^kT^{-1}$, för varje naturligt tal k. Matrismultiplikation är associativ, vilket ger $A^{1001} = A{*}A^{1000}$. Resultatet ovan ger $A^{1000} = TD^{1000}T^{-1} = TIT^{-1} = I$, där I är enhetsmatrisen.
Svar: $A^{1001} = A$