Lösningsförslag till tenta 2009-04-16
Linjär algebra D

Uppgift 1. Vektorerna $u = (1,2,3) - (2,-1,0) = (-1,3,3)$ och $v = (1,1,1) - (2,-1,0) = (-1,2,1)$ är båda parallella med planet, vars normal därför fås ur

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3e_1 - 2e_2 + e_3$$

(a) En godtycklig punkt $(x, y, z) \in \pi$ precis då exempelvis vektorn $(x-1, y-1, z-1)$ är vinkelrät mot planets normal $(-3,-2,1)$. Detta ger ekvationen

$$(x-1, y-1, z-1) \cdot (-3,-2,1) = 0 \quad \Leftrightarrow -3x - 2y + z + 4 = 0$$

(b) Vi kan använda en färdig formel. Dividera planets ekvation med längden av normalvekorn $(-3,-2,1)$.

$$l(x,y,z) = \frac{-3x - 2y + z + 4}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 0$$

Nu fås avståndet mellan punkten $(1,0,1)$ och planet som

$$|l(1,0,1)| = \frac{2}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Uppgift 2. Vi bildar en matris med vektorerna som kolonnvektorer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ a & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kolonnerna i matrisen är linjärt beroende precis då $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning, vilket inträffar precis då determinanten för matrisen är noll.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ a & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2(a^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 1$$

Uppgift 3. Rita själv figur! Med hjälp an mittpunktsformeln, se vid behov sidan 26 i läroboken, fås de tre sambanden

$$\begin{cases} \vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \\ \vec{OR} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) \\ \vec{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB}) \end{cases}$$

Genom att addera dessa fås direkt det önskade resultatet.

Uppgift 4.

Vi får med hjälp av räkneregler för skalärprodukt och förutsättningarna att

$$(t\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{s}\mathbf{v}) = \mathbf{t}|\mathbf{u}|^{\mathbf{2}} - \mathbf{s}|\mathbf{v}|^{\mathbf{2}}$$

Svar: Ortogonalitet precis då $s = t$.

Uppgift 5.

(a) Jag ger här endast svaret, räkningarna klarar Du själv.
Egenvärdena är 2, 1 och -1 och en egenvektor till egenvärdet 2 är $(1, 0, 0)^T$.

(b) Kalla de aktuella egenvärdena för λ_1 och λ_2, vilka är olika. Antag att $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ är egenvektor till $\mathbf{A}$, då finns ett tal μ så att

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mu(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda_1 - \mu)\mathbf{x}_1 + (\lambda_2 - \mu)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$

Vi använder nu att egenvektorer till olika egenvärden är linjärt oberoende, varför sista likheten ovan medför att $\lambda_1 - \mu = \lambda_2 - \mu = 0$ eller att $\lambda_1 = \lambda_2$. Eftersom detta är en motsägelse, kan ej vårt antagande att $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ är egenvektor till $\mathbf{A}$ vara sant.