Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
Matematik

Tentamen: Linjär algebra D
TMV215 och MMG D20

Datum: 2008-12-18 **Tid:** 0830-1230 **Salar:** M

Förfrågningar: tel 0762-721860 , 0762-721861

Lösningar: Kommer att finnas på nätet
www.math.chalmers.se/~goran/D1lina

Betygsgränser Chalmers: Poäng 20, 30 resp 40, ger betyget 3, 4 resp 5.

Betygsgränser Universitet: Poäng 20 resp 35, ger betyget G resp VG.

Skrivningsvisning: Tisdagen den 20/1 i Ide'läran

Hjälpmedel:

- Högst en av formelsamlingarna Beta eller Physics handbook. Observera *inga* miniräknare.

Uppgift 1. Planet π: $2x - y + 2z + 3 = 0$ och linjen ℓ: $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(1, 2, 2)$ $\;, t \in R$ är givna i ett parallellkoordinatsystem O_{xyz}

(a) Bestäm skärningspunkten mellan planet och linjen. Kontrollera att framräknad punkt verligen ligger i planet och på linjen. (5p)

(b) Låt nu O_{xyz} dessutom vara ett ortonormerat system. Ange $\cos(\theta)$, där θ är vinkeln mellan linjen och planets normal. (5p)

Uppgift 2. I ett ortonormerat koordinatsystem är punkten $(2, 4, 1)$ och planet $x + y + z - 1 = 0$ givna.

(a) Beräkna ortogonala projektionen av punkten i planet. (5p)

(b) Beräkna speglingen av punkten i planet. (5p)

Ledning: Kanske är det enklast att välja en punkt, t ex $(0, 0, 1)$, i planet. Rita figur och gör stutligen lämpliga kontroller av framräknade resultat.

Uppgift 3.

(a) För vilka värden på parametern a är matrisen A nedan inverterbar?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix} \qquad (5p)$$

(b) Ange egenvärden och tillhörande egenvektorer till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenvektorerna skall väljas så att de bildar en ortonormerad bas. (5p)

Uppgift 4. Beräkna arean av den elliptiska skivan innesluten i

$$x_1^2 - 6x_1x_2 + 13x_2^2 = 1 \qquad (10p)$$

Uppgift 5. Den kvadratiska matrisen A är av ordning n och har egenvärden och egenvektorer

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \;\; resp \;\; x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)},$$

där egenvektorerna förutsättes vara linjärt oberoende. Vi har således sambandet

$$Ax^{(j)} = \lambda_j x^{(j)} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

För ett tal $\mu \neq \lambda_j \;\; , \;\; j = 1, 2, \ldots, n$ blir matrisen $A - \mu I$, där I är enhetsmatrisen, inverterbar och vi kan definiera en matris B som

$$B = (A - \mu I)^{-1}$$

Diagonalisera nu B, dvs $T^{-1}BT = D$. Både T och diagonalmatrisen D skall uttryckas med hjälp av egenvärden och egenvektorer till A och talet μ. För full poäng kräves att du även visar att $A - \mu I$ är inverterbar. (10p)

Lycka till !