Lösningsförslag till tenta 2005-12-16
Linjär algebra D

Uppgift 1. Vektorerna $u = (2,3,1) - (1,0,1) = (1,3,0)$ och $v = (2,1,2) - (1,0,1) = (1,1,1)$ är båda parallella med planet, vars normal därför fås ur

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3e_1 - e_2 - 2e_3 = (3,-1,-2)$$

En godtycklig punkt $(x,y,z) \in \pi$ precis då exempelvis vektorn $(x-1,y,z-1)$ är vinkelrät mot planets normal $(3,-1,-2)$. Detta ger ekvationen

$$(x-1,y,z-1)\cdot(3,-1,-2) = 0 \quad \Leftrightarrow 3x - y - 2z - 1 = 0$$

Uppgift 2. Låt u vara vektorn från origo O - som ligger i planet - till punkten

P, alltså $u = (1,14,1)$. Låt vidare u' vara vektorn från O till P'. u' och P' har således samma koordinater. Rita figur!

En normal till planet är $n = (2,1,2)$. Kalla u:s ortogonalprojektion mot n för u_n

$$u_n = \frac{(u\cdot n)}{|n|^2} n = 2(2,1,2)$$

Ur sambandet $u = u' + u_n$ fås naturligtvis $u' = u - u_n = (1,14,1) - (4,2,4) = (-3,12,-3)$
Svar: $P' = (-3,12,-3)$

Uppgift 3. Elementära omformningar, Gausselimination, påverkar ej rangen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -a & 2 \\ a & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 2-a & 2-a \\ 0 & 2a-4 & 4-a^2 \\ 0 & -2 & 3+a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2+a \\ 0 & -2 & 3+a \end{pmatrix}$$

Sista omskrivningen ovan förutsätter att $a \neq 2$.

$$a \neq 2 \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4+a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad a = 2 \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Svar: $a \neq 2 \Rightarrow rang(A) = 3$ och $a = 2 \Rightarrow rang(A) = 2$

(b) Dimensionsatsen ger att $dim(null(A)) = 3 - rang(A)$
Svar: $a \neq 2 \Rightarrow dim(null(A)) = 0$ och $a = 2 \Rightarrow dim(null(A)) = 1$

Uppgift 4.

(a) Vi ger här endast svaret. Egenvärdena är 1 och -1 med egenvektorer exempelvis $(1,1)^T$ och $(1,2)^T$.

(b)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Matrismultiplikation är associativ, vilket ger $A^{1001} = A * A^{1000}$. Resultatet i b) ger $A^{1000} = TD^{1000}T^{-1} = TIT^{-1} = I$, där I är enhetsmatrisen.
Svar: $A^{1001} = A$

Uppgift 5. Ur figur ser vi att $\vec{AP} = \vec{AC} + \vec{CP}$. Detta ger $\vec{CP} = -2e_2$. Sambandet mellan de båda baserna kan fås genom att uttrycka de båda diagonalerna på två sätt

$$\begin{cases} 2e_1 + 3e_2 = e_1 - v_1 \\ e_2 - e_1 = v_2 - v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 + 3e_2 = -v_1 \\ -e_1 + e_2 = v_2 - v_1 \end{cases}$$

Addition ger $4e_2 = -2v_1 + v_2$ och $-2e_2 = v_1 - \frac{1}{2}v_2$.

Svar: $\vec{CP} = v_1 - \frac{1}{2}v_2$, dvs P:s koordinater i $C_{v_1 v_2}$ är $(1, -\frac{1}{2})$.