Lösningsförslag till tenta 2009-12-17
Linjär algebra D

Uppgift 1. Vektorerna $u = (4, 1, 1) - (1, 0, -1) = (3, 1, 2)$ och $v = (2, 1, 2) - (1, 0, -1) = (1, 1, 3)$ är båda parallella med planet, vars normal därför fås ur

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = e_1 - 7e_2 + 2e_3$$

(a) En godtycklig punkt $(x, y, z) \in \pi$ precis då vektorn $(x - 1, y, z + 1)$ är vinkelrät mot planets normal $(1, -7, 2)$. Detta ger ekvationen

$$(x - 1, y, z + 1) \cdot (1, -7, 2) = 0 \quad \Leftrightarrow x - 7y + 2z + 1 = 0$$

Svar: Planets ekvation är $x - 7y + 2z + 1 = 0$.

(b) Vi kan använda en färdig formel. Dividera planets ekvation med längden av normalvekorn $(1, -7, 2)$.

$$\ell(x, y, z) = \frac{x - 7y + 2z + 1}{\sqrt{1^2 + (-7)^2 + 2^2}} = 0$$

Nu fås avståndet mellan punkten $(-1, 0, 1)$ och planet som

$$|\ell(-1, 0, 1)| = \frac{2}{\sqrt{54}} = \sqrt{\frac{2}{27}}.$$

Svar: Avståndet är $\sqrt{\frac{2}{27}}$.

Uppgift 2. Kalla planets normalen för $n = (1, 1, 1)$. Låt u vara vektorn från

punkten $(0, 4, 0)$ till $P : (2, 4, 0)$, dvs $u = (2, 0, 0)$. Rita noggrann figur! Vektorn u projiceras på normalen n varvid u' erhålles

$$u' = \frac{u \cdot n}{n \cdot n} n = \frac{2}{3} n = (2/3, 2/3, 2/3)$$

Punkten Q är P:s projektion i planet och O systemets origo. Vi får

$$\vec{OQ} = \vec{OP} - u' = (2, 4, 0) - (2/3, 2/3, 2/3) = (4/3, 10/3, -2/3)$$

Kontroll: $(4/3, 10/3, -2/3) \in \pi \Leftrightarrow \ (4 + 10 - 2)/3 - 4 = 0$.
Svar: $(4/3, 10/3, -2/3) = \frac{2}{3}(2, 5, -1)$

Uppgift 3. Vi gör det bekvämt för oss och räknar så mycket som möjligt med matriser.

Linjens ekvation kan skrivas $(2 \;\; 3)x = (2 \;\; 3)A^T x' = (-1 \;\; 10)x' = 0$.
Svar: $-x_1' + 10x_2' = 0$.

Uppgift 4. Vi försöker avbilda den elliptiska skivan på en cirkelskiva med avbildningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

där A är en konstant 2×2-matris. Rita själv en rimlig figur! Kvadratkomplettering ger

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 10x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + (3x_2)^2 = 4$$

och sätter vi $y_1 = x_1 + x_2$ och $y_2 = 3x_2$ fås $y_1^2 + y_2^2 = 4$. Vi ser också att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad det(A) = 3$$

Vi använder nu: *area av bild = det(A)* $\cdot$ *area av ursprung*
och får: $4\pi = 3 \cdot$ *sökt area.*
Svar: $\frac{4\pi}{3}$

Uppgift 5.

(a) Egenvärdena kan fås ur

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda_1 = 2 \ , \ \lambda_2 = 4.$$

Egenvektorerna fås ur systemen $(A - 2I)x = 0$ och $(A - 4I)x = 0$.
Svar: Egenvärden 2 och 4 samt egenvektorer t ex $(1 \ \ 1)^T$ resp $(-1 \ \ 1)^T$.

(b) Man kan använda att A har ett egenvärde 0 precis då $det(A) = 0$. Vi väljer här att istället se på systemet $Ax = 0$, $x \neq 0$ direkt

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

Första ekvationen ger $x_2 = x_3$, om båda är 0 ger andra ekvationen att även $x_3 = 0$, vilket ej fungerar. Vi kan alltså utan inskränkning antaga att t ex $x_2 = x_3 = 1$. Andra ekvationen ger nu att även $x_3 = 1$ och den tredje blir $-4 + 1 + a = 0$. Således är $a = 3$. För att bestämma de andra egenvärdena ser vi på

$$det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = -\lambda(\lambda + 2)(\lambda - 4).$$

Svar: $a = 3$ ger ett egenvärde 0 med egenvektor t ex $(1 \ \ 1 \ \ 1)^T$. De andra egenvärdena är -2 och 4.