En kortfattad redogörelse för Determinantbegreppet

Göran Starius , goran@chalmers.se
Matematiska vetenskaper Chalmers/GU 2009

1 Introduktion

Vi skall till varje kvadratisk matris $\mathbf{A}$ ordna ett tal, som kallas determinanten till $\mathbf{A}$ och betecknas med $det(\mathbf{A})$ eller $|\mathbf{A}|$. Detta tal skall ha egenskapen att $det(\mathbf{A}) \neq 0$ precis då kolonnerna/raderna i $\mathbf{A}$ är linjärt oberoende, vilket ju är likvärdigt med att $\mathbf{A}^{-1}$ existerar. Tänker vi oss att kolonnerna bildar en parallellepiped, med dessa vektorer som kanter, förstår vi att determinanten kan väljas just som volymen av denna. Ty parallellepipedens volym blir ju rimligen noll precis då vektorerna är linjärt beroende, dvs ligger i ett plan.

Användning Determinanter utnyttjas till att uttrycka ett flertal formler på ett kompakt och lättmemorerat sätt, bl a för s k vektorprodukt och diverse geometriska formler för area- och volymberäkningar. Determinantbegreppet har också ett flertal mera rent teoretiska användningsområden, vilka ofta baseras på att $det(\mathbf{A}) = 0$ precis då kolonnerna i $\mathbf{A}$ är linjärt beroende eller annorlunda uttryckt att det homogena systemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning. Det senare utnyttjas senare i kursen för så kallade matrisegenvärdesproblem.

Olika betraktelsesätt Man kan införa determinanter medelst elimination eller med hjälp av geometriskt betraktelsesätt. Vi väljer här det senare eftersom det troligen ger bäst intuitiv förståelse av det aktuella begreppet. Något underskott på elimination, i grundkurser i linjär algebra, förekommer ju ändå knappast. För enkelhetens skull nöjer vi oss med reella matriser och skalärer.

Syfte med skriften Ovan har antytts att determinanter är viktiga i olika sammanhang. Emellertid händer det nästan med automatik att de upptar en oproportionerligt stor del av grundkurser i linjär algebra. I huvudsak beror detta på att läroböcker i ämnet ofta ägnar ett betydande antal sidor åt just determinanter. Förhoppningsvis kan denna lilla skrift råda bot på detta och skall således ej ses som ett komplement till använd kursbok, utan snarare som en kompression och ett alternativ till determinantavsnittet i kursboken.

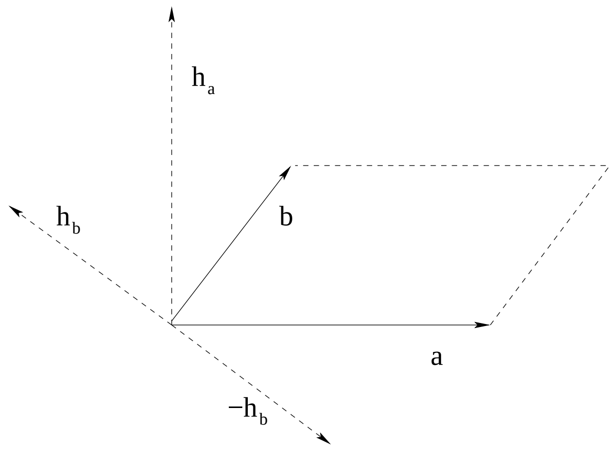
Läsråd Vid de första två genomläsningarna behöver du ej fästa så stor vikt vid detaljerna i härledningarna. Begrepp, en del formler för beräkning av determinanter kan gärna få ta hela din uppmärksamhet i anspråk. Studera däremot exemplen noggrant! Under de fortsatta genomgångarna fäster du även vikt vid den logiska tråden, vilken löper genom avsnitt 2 och 3. I avsnitt 4 dominerar pragmatismen eftertryckligt. Detta avsnitt kan du vänta med, tills du kan de andra väl.

2 Determinant för 2×2-matriser

Vi skall i detta avsnitt definiera determinant för matriser av ordning 2 som arean av en parallellogram, vilken spännes upp av matrisens kolonner. Låt $\mathbf{a} = (a_1 \ , \ a_2)^T$ och $\mathbf{b} = (b_1 \ , \ b_2)^T$ vara två vektorer i planet, uttryckta i ett positivt orienterat ON-system, och bilda matrisen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a} \ \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} .$$

I figuren nedan är vektorsystemet $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ positivt orienterat varför vi låter $det(\mathbf{A})$ vara lika med arean av parallellogrammen. Vid negativ orientering låter vi $det(\mathbf{A})$ vara minus denna area. Vektorn $\mathbf{h}_a = (-a_2 \ , \ a_1)^T$ har samma längd som $\mathbf{a}$ och är vriden ett kvarts varv i positiv led i förhållande till denna. Vi ortogonalprojicerar $\mathbf{b}$ på $\mathbf{h}_a$ och bildar projektionens längd $|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_a)|/|\mathbf{h}_a|$. Eftersom vi har $|\mathbf{h}_a| = |\mathbf{a}|$ fås arean $|\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_a| = \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_a > 0$. Vi kan naturligtvis även bilda $\mathbf{h}_b = (-b_2 \ , \ b_1)$ och få arean av parallellogrammen till $-\mathbf{a} \cdot \mathbf{h}_b > 0$.



Vi definierar nu determinanten av $\mathbf{A}$ som

$$det(\mathbf{A}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_a = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{h}_b = a_1 b_2 - b_1 a_2. \tag{1}$$

Man övertygar sig lätt om att denna definition även passar vid negativ orientering av kolonnerna i $\mathbf{A}$. Rita själv figur för detta fall!

Vi ser att avbildningarna $\mathbf{a} \rightarrow det(\mathbf{A})$ och $\mathbf{b} \rightarrow det(\mathbf{A})$ är linjära, vilket direkt följer ur (1) och räkneregler för skalärprodukt. Vidare gäller att $det((\mathbf{a} \ \ \mathbf{b})) = -det((\mathbf{b} \ \ \mathbf{a}))$, ty platsbyte ändrar orientering. Eftersom vi har att $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^T)$, vilket framgår av (1), gäller motsvarande även för raderna. Vi säger att determinanten är multilinjär och alternerande med avseende på både kolonner och rader.

Exempel 1 Beräkna arean av triangeln med hörn i punkterna $(1, 1)$, $(2, 3)$ och $(4, 2)$ givna i ett ON-system. Vi bildar först vektorerna $(1, 2) = (2, 3) - (1, 1)$ och $(3, 1) = (4, 2) - (1, 1)$ och beräknar arean av den parallellogram som spännes upp av desamma

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -5.$$

Parallellogrammens area blir således 5 och triangelarean 5/2. $\odot$

Exempel 2 För vilka värden på parametern a är kolonnerna/raderna i matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a^2-1 \\ 1 & a^2+a \end{pmatrix}$$

linjärt beroende? Ange också $\mathbf{A}^{-1}$ när den existerar. Vi ser på

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & a^2-1 \\ 1 & a^2+a \end{vmatrix} = a(a^2+a) - (a^2-1) = a^3+1 = 0 \ \Leftrightarrow \ a = -1$$

Kolonnerna/raderna i $\mathbf{A}$ är således linjärt beroende precis då $a = -1$.

För $a \neq -1$ existerar inversen till $\mathbf{A}$ och man kontrollerar lätt att

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a^3+1} \begin{pmatrix} a^2+a & 1-a^2 \\ -1 & a \end{pmatrix}, \quad ty \ \ \mathbf{AA}^{-1} = I. \quad \odot$$

Exempel 3 Beräkna determinanterna för följande matriser

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

Genom att använda uttrycket längst till höger i formel (1) fås direkt att determinanterna i samtliga fall blir produkten av diagonalelementen. $\odot$

Exempel 4 Vi använder här samma beteckningar som i början av detta avsnitt och inför

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a} \ \ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Vad blir $det(10\mathbf{A})$ och $det((\mathbf{a} + c\mathbf{b} \ \ \mathbf{b}))$, där $c \in R$?

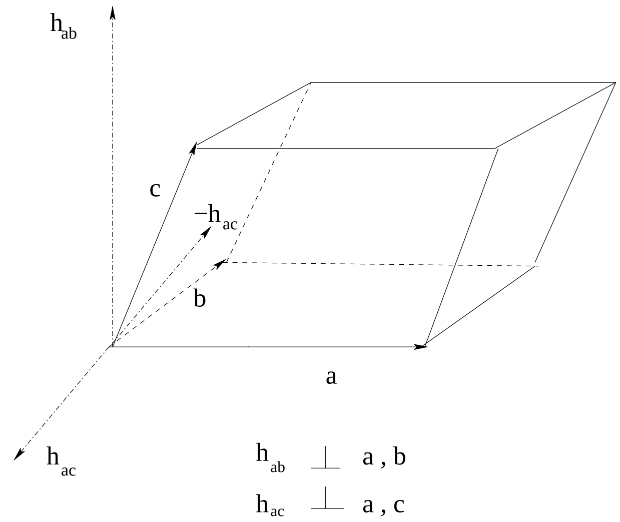
Vi utnyttjar multilinjäriteten och får $|10\mathbf{a} \ \ 10\mathbf{b}| = 10|\mathbf{a} \ \ 10\mathbf{b}| = 10 \cdot 10|\mathbf{a} \ \ \mathbf{b}|$. Vi har också $|\mathbf{a} + c\mathbf{b} \ \ \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \ \ \mathbf{b}| + |c\mathbf{b} \ \ \mathbf{b}|$. Eftersom sista termen är noll gäller $|\mathbf{a} + c\mathbf{b} \ \ \mathbf{b}| = |\mathbf{a} \ \ \mathbf{b}|$. $\odot$

3 Determinant för 3×3-matriser

Detta fall blir naturligtvis analogt med 2×2-fallet, men lite mera arbetsamt. Vi skall definiera determinant för matriser av ordning 3 som volymen av en parallellepiped, vilken spännes upp av matrisens kolonner. Låt $\mathbf{a} = (a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3)^T$, $\mathbf{b} = (b_1 \ , \ b_2 \ , \ b_3)^T$ och $\mathbf{c} = (c_1 \ , \ c_2 \ , \ c_3)^T$ vara tre vektorer i rummet uttryckta i ett positivt orienterat ON-system och bilda matrisen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a} \ \ \mathbf{b} \ \ \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

I figuren nedan är vektorsystemet $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ positivt orienterat varför vi låter $det(\mathbf{A})$ vara lika med volymen av parallellepipeden. Vid negativ orientering låter vi $det(\mathbf{A})$ vara minus denna volym, alltså ha ett negativt värde. Gränsfallet $det(\mathbf{A}) = 0$ svarar mot att kolonnerna alla ligger i ett och samma plan, dvs är linjärt beroende.



Vi beräknar *höjden* mot en sida och därefter *arean* av sidan och bildar produkten av dessa storheter. Först bestämmer vi en vektor $\mathbf{x} = (x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3)^T$ som är vinkelrät mot både exempelvis $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, dvs mot en sida i parallellepipeden. Vi skall alltså kräva $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$ och $\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = 0$ eller utskrivet

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (a_1b_2 - b_1a_2)x_2 + (a_1b_3 - b_1a_3)x_3 = 0$$

där vi har multiplicerat första ekvationen med b_1 och andra a_1 och subtraherat. En lösning till den högra ekvationen är $x_2 = -(a_1b_3 - b_1a_3)$ och $x_3 = (a_1b_2 - b_1a_2)$ och båda de vänstra ekvationerna ger nu $x_1 = (a_2b_3 - a_3b_2)$. Låt oss införa vektorn

$$\mathbf{h}_{ab} = (a_2b_3 - a_3b_2\ ,\ -(a_1b_3 - b_1a_3)\ ,\ a_1b_2 - b_1a_2)^T\ , \tag{2}$$

vilken är vinkelrät mot $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Vidare är $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{h}_{ab}$ positivt orienterade, vilket lätt kan kontrolleras i något specialfall, t ex för $a_3 = b_3 = 0$.

Vi bestämmer nu arean för den parallellogram som spännes upp av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Med hjälp av ytsinussatsen fås $arean = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\theta)$, där θ är minsta vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$. Genom att kvadrera och använda $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$ samt skalärprodukten $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\theta)$ fås nu

$$arean^2 = |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

En del räkningar ger nu tämligen lätt att

$$arean^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - b_1a_3)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2\ ,$$

och till vår förtjusning ser vi att arean är längden av $\mathbf{h}_{ab}$ i (2) alltså

$$arean = |\mathbf{h}_{ab}|\ . \tag{3}$$

Vi har nu nästan allt som behövs för att beräkna volymen av parallellepipeden i figuren ovan. Projicera $\mathbf{c}$ på $\mathbf{h}_{ab}$ och beräkna därefter projektionsvektorns längd, vi får

$$\frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_{ab})\mathbf{h}_{ab}}{|\mathbf{h}_{ab}|^2} \quad respektive \quad \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_{ab})}{|\mathbf{h}_{ab}|}\ .$$

Volymen fås nu som basytan gånger höjden och eftersom $det(\mathbf{A})$ i det aktuella fallet skall vara just volymen har vi $det(\mathbf{A}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_{ab}$. Vi kan naturligvis beräkna volymen på ytterligare två sätt. Vi bildar då $\mathbf{h}_{ac}$ och $\mathbf{h}_{bc}$ helt analogt med $\mathbf{h}_{ab}$. Eftersom $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{h}_{ac}$ är positivt orienterade kommer $\mathbf{h}_{ac}$ och $\mathbf{b}$ att peka åt olika håll i förhållande till planet innehållande $\mathbf{a}$ och $\mathbf{c}$. Volymen blir således $-\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_{ac}$. Se figuren ovan. Det tredje sättet blir helt analogt med det första. Kontrollera detta! Vi sammanfattar nu

$$det(\mathbf{A}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}_{bc} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_{ac} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_{ab} \tag{4}$$

Man övertygar sig om att denna definition även passar vid negativ orientering av kolonnerna i $\mathbf{A}$. Rita själv figur för detta fall!

Liksom för 2×2-matriser kan naturligtvis determinanten uttryckas med matriselementen. Vi får då följande formel

$$det(\mathbf{A}) = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - c_2b_3a_1 \ , \tag{5}$$

vilken är lätt att komma ihåg med hjälp av nedanstående figur.

$$\overbrace{\begin{array}{ccc} \oplus & \diamond & \heartsuit \\ \heartsuit & \oplus & \diamond \\ \diamond & \heartsuit & \oplus \end{array}}^{+ \ tecken} \quad , \quad \overbrace{\begin{array}{ccc} \heartsuit & \diamond & \ominus \\ \diamond & \ominus & \heartsuit \\ \ominus & \heartsuit & \diamond \end{array}}^{- \ tecken}$$

Med viss möda fås även för 3×3-matriser att $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^T)$, exempelvis med (5). Vi påpekar att determinanten är multilinjär och alternerande för både kolonner och rader, precis som den är för 2×2-matriser.

Exempel 5 I ett ortonormerat koordinatsystem har en tetraeder hörn i punkterna $(1, 1, 0)$, $(2, 2, 1)$, $(1, 3, 3)$ och $(3, 2, 2)$. Beräkna tetraederns volym.

De tre kanterna utgående från punkten $(1, 1, 0)$ ges av $(1, 1, 1)$, $(0, 2, 3)$ och $(2, 1, 2)$. Dessa spänner upp en parallellepiped vars volym, till beloppet, ges av

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3,$$

där vi använt formel (5). Volymen av parallellepipeden kan också skrivas som $b \cdot h$, där b är arean av en sida och h höjden mot densamma. Volymen av tetraedern blir $(b/2) \cdot h/3 = (b \cdot h)/6$, enligt känd geometrisk formel. Rita en figur! Tetraederns volym blir således $3/6 = 1/2$. $\odot$

Exempel 6 Ange determinanterna för de tre matriserna

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} .$$

Formel (5) ger att samtliga determinanter blir produkten av diagonalelementen, precis som i 2×2-fallet. Endast *en* av de 6 termerna kan bli skild från noll. De övriga blir noll av s k strukturskäl. $\odot$

Utveckling efter kolonn och rad
Sambanden (4) kan skrivas på ett mera lättmemorerat sätt med hjälp av s k underdeterminanter

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{h}_{bc} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{h}_{ac} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{h}_{ac} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Låt nu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ vara en kvadratisk matris som tidigare. Vi gör följande definition för att få enklare skrivsätt.

Defintion Med *underdeterminanten* D_{ij} till elementet a_{ij} i matrisen $\mathbf{A}$ menas determinanten av den matris som erhålles om rad i och kolonn j tages bort i $\mathbf{A}$.

Vi kan nu sammanfatta alla formlerna i (6) på följande sätt

$$det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} D_{ij} \quad , \quad j = 1, 2, 3 \ , \tag{7}$$

vilket är utveckling efter kolonn. Eftersom determinanten ej ändras vid transponering av en matris fås helt analoga samband för rader, dvs utveckling efter rad

$$det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} D_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \ . \tag{8}$$

Exempel 7 Vi beräknar determinanten för matrisen nedan genom att exempelvis utveckla den efter andra raden

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(\mathbf{A}) = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} .$$

Således $det(\mathbf{A}) = -2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 5$. Beräkna själv determinanten genom att utveckla efter tredje kolonn. ⊙

Exempel 8 För vilka värden på parametern a blir matrisen $\mathbf{A}$ nedan inverterbar?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Vi har ju att $\mathbf{A}^{-1}$ existerar precis då $det(\mathbf{A}) \neq 0$, således beräknar vi determinanten. Ur multilinjäriteten för raderna följer att vi kan lägga en multipel av en rad till en annan rad utan att determinantens värde ändras. Detta betyder speciellt att Gausselimination ej förändrar determinanten. Notera att det ofta är listigt att introducera nollor i matrisen. Vi får

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1-2a \\ 0 & 1+a & -1-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1-2a \\ 1+a & -1-a^2 \end{vmatrix} .$$

Sista likheten fås naturligtvis genom utveckling efter första kolonn. Vi får nu att $det(\mathbf{A}) = a^2+a-2 = (a+2)(a-1)$. Således $\mathbf{A}^{-1}$ existerar precis då $a \neq -2$ och $a \neq 1$. $\odot$

Volymsatsen

Vi har tidigare arbetat i ett positivt orienterat ON-system, som vi kan beteckna med $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, och vektorerna i (4) har varit uttryckta i detta system. Exempelvis $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$. *Volymen med tecken* av parallellepipeden, $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ säg, uppfyller

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \;\; \mathbf{b} \;\; \mathbf{c}| \cdot V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \ ,$$

där den sista faktorn varit 1. Vi skall nu generalisera detta samband till godtyckliga vektorsystem $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, i huvudsak för att det behövs för att kunna härleda och bevisa några viktiga samband. Vi vet redan att

$$V(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \ , \ b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \ , \ c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3) \ ,$$

är multilinjär med avseende på alla sina tre argument. Utnyttjas detta fullt ut fås $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ termer

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j c_k \cdot V(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) \ .$$

Emellertid, $V(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = 0$ närhelst minst två argument är lika i densamma. Av strukturskäl kan högst $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ termer vara skilda från 0. Vidare vet vi att V är alternerande alltså blir

$$V(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = \pm V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \quad , \quad i \neq j \neq k \ .$$

Vi har nu $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = c \cdot V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, där c är en skalär storhet som endast beror av matriselementen. För fallet ortonormerad bas $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ blir ju $c = det(\mathbf{A})$ enligt (4), men räkningarna ovan gäller helt oberoende av vad vektorsystemet har för egenskaper. Vi har alltså fått fram sambandet

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = det(\mathbf{A}) \cdot V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \ , \tag{9}$$

för godyckligt vektorsystem $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Vi ser att samma orientering av de båda vektorsystemen svarar mot $det(\mathbf{A}) > 0$ och olika orientering mot $det(\mathbf{A}) < 0$.

Vi formulerar nu (9) med matrisbeteckningar, vilket gör att vi kan utnyttja räkneregler för matriser, t ex associativitet. Vi inför radmatriser vars element är vektorer och får

$$\begin{gathered} \mathbf{e} = (\mathbf{e}_1 \;\; \mathbf{e}_2 \;\; \mathbf{e}_3) \ , \ (\mathbf{a} \;\; \mathbf{b} \;\; \mathbf{c}) = \mathbf{e}\mathbf{A} \\ V(\mathbf{e}\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}) \ V(\mathbf{e}) \ , \end{gathered} \tag{10}$$

som vi kallar *volymsatsen.*

Sats Produktsatsen för determinanter
Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara två kvadratiska matriser, då är

$$det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A}) \cdot det(\mathbf{B}) \ .$$

Bevis: Låt nu $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ vara en bas, vilket är detsamma som att $V(\mathbf{e}) \neq 0$. Se på vektorsystemet $\mathbf{e}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{eA})\mathbf{B}$. Nu använder vi volymsatsen (10)

$$V(\mathbf{e}(\mathbf{AB})) = V((\mathbf{eA})\mathbf{B}) = det(\mathbf{B})V(\mathbf{eA}) = det(\mathbf{B})det(\mathbf{A})V(\mathbf{e}) \ .$$

Eftersom $V(\mathbf{e}(\mathbf{AB})) = det(\mathbf{AB})V(\mathbf{e})$ är saken klar. $\bullet$

Exempel 9 Beräkna $det(\mathbf{AB})$ och $det(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ för

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi får direkt att $det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ och $det(\mathbf{B}) = 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4$. Vidare är $det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})det(\mathbf{B}) = 6 \cdot 4 = 24$. Kvantiteten $det(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ kan ej beräknas på något motsvarande sätt. En determinant är linjär m a p var och en av dess kolonner *separat*. Vi får beräkna $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ och därefter $det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = -2$. Läsaren uppmanas att utföra beräkningarna. $\odot$

Determinanten som area- och volymförändringsfaktor
Vi skall nu undersöka hur volymen av en kropp förändras vid linjär avbildning

$$R^3 \ni \mathbf{x} \ \longrightarrow \ \mathbf{Ax} \in R^3 \ .$$

Vi börjar med att avbilda en parallellepiped och generaliserar sedan till allmännare områden.
Sats Volymförändring vid linjär avbildning
De tre vektorerna $\mathbf{b}_k = (b_{1k} \ , \ b_{2k} \ , \ b_{3k})^T \in R^3 \ , \ k = 1, 2, 3$ avbildas av $R^3 \ni \mathbf{x} \ \longrightarrow \ \mathbf{Ax} \in R^3$, där $\mathbf{A}$ är en kvadratisk matris, på $\mathbf{Ab}_1, \mathbf{Ab}_2$ respektive $\mathbf{Ab}_3$. Då gäller följande samband för volymerna av parallellepipederna uppspända av de båda vektorsystemen

$$V(\mathbf{Ab}_1, \mathbf{Ab}_2, \mathbf{Ab}_3) = det(\mathbf{A}) \cdot V(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) \ . \qquad (11)$$

Bevis: Alla vektorer ovan tänkes vara givna i en bas $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1 \ \ \mathbf{e}_2 \ \ \mathbf{e}_3)$. Inför den kvadratiska matrisen $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3)$. Relatera nu volymerna av de parallellepipeder som spännes upp av $\mathbf{e}(\mathbf{AB})$ respektive $\mathbf{eB}$

$$V(\mathbf{e}(\mathbf{AB})) = det(\mathbf{AB})V(\mathbf{e}) = det(\mathbf{A})(\ det(\mathbf{B})V(\mathbf{e}) \ ) = det(\mathbf{A})V(\mathbf{eB}) \ \bullet$$

I beviset ovan har volymsatsen (10) och produktsatsen för determinanter använts två respektive en gång.

Satsen om volymförändring kan naturligtvis också formuleras för parallellogrammer i planet, varvid determinanten fungerar som areaförändringsfaktor vid linjär avbildning. Det är också lätt att inse att satsen även gäller för betydligt allmännare områden. I planet tänker man sig att ett fint rutnät täcker området ifråga och att varje ruta avbildas på en parallellogram vars area då blir

$det(\mathbf{A})$ gånger arean av aktuell ruta. Summering över alla rutor helt i området, Ω säg, och någon form av gränsövergång ger sedan

$$area(\Omega') = det(\mathbf{A}) \cdot area((\Omega) \ ,$$

där Ω' är bilden av Ω, vid den linjära avbildningen given av matrisen $\mathbf{A}$. Motsvarande gäller naturligtvis även i rummet. Vi har alltså minnesregeln

Volymen/arean av bilden = $det(\mathbf{A})\cdot$ *volymen/arean av ursprunget.*

Exempel 10 I ett ortonormerat system $O_{x_1x_2}$ ges en ellips av

$$x_1^2 - 6x_1x_2 + 13x_2^2 = 1 \ .$$

Beräkna arean av motsvarande elliptiska skiva.

Vi försöker att avbilda ellipsen till ett likaledes ortonormerat system $O_{y_1y_2}$ så att en cirkel erhålles. Se på

$$x_1^2 - 6x_1x_2 + 13{x_2}^2 = (x_1 - 3x_2)^2 + (2x_2)^2 = 1 \ ,$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 3x_2 \\ y_2 = 2x_2 \end{cases} , \quad y = \mathbf{A}\mathbf{x} \ , \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

Bilden av den elliptiska skivan blir således en cirkelskiva med radien 1. *Arean av bilden* = $det(\mathbf{A})\cdot$ *arean av ursprunget* ger alltså $\pi = 2 \cdot area(ellipsskivan)$. Svaret blir således $\pi/2$. $\odot$

4 Determinant för $n \times n$-matriser

Vi skall i detta avsnitt ge en pragmatisk och koncis framställning av determinanter för kvadratiska matriser av godtycklig ordning n. Alla resultat erhållna för $n \leq 3$ kan direkt generaliserar. Vi nöjer oss därför med att översiktligt definiera determinant i det allmänna fallet samt att skriva ned en del räkneregler och slutligen ge några exempel.

Låt $\mathbf{A} = (a_{ij})$ vara en matris av ordning n och $\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ ett vektorsystem i R^n. Bilda vektorerna $\mathbf{a}_k = a_{1k}\mathbf{e}_1 + a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nk}\mathbf{e}_n$, där $k = 1, 2, \ldots, n$. Kasta en blick på sambanden (9) och (10) samt deras härledning. Vi tänker oss nu en multilinjär och alternerande funktion $V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ som skall föreställa volymen av en parallellepiped i R^n. Med hjälp av denna skall vi införa determinant, på samma sätt som för fallet $n = 3$ i samband (9). Detta kan göras utan att vi ens vet att en sådan funktion existerar. Multilinjäritet ger oss nu som tidigare att

$$V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n} V(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \ldots, \mathbf{e}_{j_n}) \ .$$

Vi definierar nu $det(\mathbf{A})$ med hjälp av

$$V(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = det(\mathbf{A}) \cdot V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \ . \tag{12}$$

Determinanten blir en summa med $n!$ termer, vilka innehåller precis en faktor ur varje rad och kolonn. Hälften av termerna föregås av ett *minus*-tecken.

Ur (12) följer multilinjäritet för kolonnerna tämligen lätt, och eftersom man kan visa att $det(\mathbf{A}^T) = det(\mathbf{A})$ har vi multilinjäritet även för raderna.

Utveckling efter kolonn och rad ges exakt av (7) respektive (8), där övre summationsindex ersättes med n.

Exempel 11 För att träna lite på räkneregler beräknar vi nu determinanten av en 4×4-matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Eftersom vi har två element 0 i första raden, är det lämpligt att uveckla efter densamma. Lägger vi $2\times$ sista kolonnen till den första blir det ännu bekvämare.

$$det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

Vi noterar på nytt fördelen med de många nollorna. $\odot$

Exempel 12 Låt $\mathbf{D} = diag(d_i)$ vara en diagonalmatris, $\mathbf{T} = (t_{ij})$ en vänstertriangulär matris dvs $t_{ij} = 0$ för $i < j$ och slutligen är $\mathbf{U} = (u_{ij})$ en högertriangulär matris dvs $u_{ij} = 0$ för $i > j$. Samtliga matriser har ordning n. Visa att determinanterna $det(\mathbf{D})$, $det(\mathbf{T})$ och $det(\mathbf{U})$ blir produkten av diagonalelementen i respektive matris.

Vilka termer i summan, svarande mot determinanten, kan bli skilda från 0? Vi ser här bara på $det(\mathbf{T})$ och lämnar resten åt läsaren. Ur första raden måste vi välja t_{11}, ur andra t_{22}, ty t_{12} går ej eftersom vi redan valt ett element ur första kolonn. Fortsätter vi så här, följer resultatet. Vi utnyttjar således att varje term i determinanten skall innehålla *precis* en faktor ur *varje* rad och *varje* kolonn.

Vi uppmanar läsaren att också använda utveckling efter rad eller kolonn på lämpligt sätt, för de tre determinanterna. $\odot$