

**Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet**  
**Matematik**

**Tentamen: Linjär algebra D**  
**Chalmers: TMV215 eller Universitet: MMG D20**  
*OBS! Precis ett av ovanstående alternativ på försättsbladet.*

**Datum:** 2009-12-17 **Tid:** 0830-1230 **Salar:** H

**Förfrågningar:** tel 0762-721860 , 0762-721861

**Lösningar:** Kommer att finnas på nätet efter 1800  
www.math.chalmers.se/~goran/D1lina

**Betygsgränser Chalmers:** Poäng 20, 30 resp 40, ger betyget 3, 4 resp 5.

**Betygsgränser Universitet:** Poäng 20 resp 35, ger betyget G resp VG.

**Skrivningsvisning:** Måndagen den 18/1-2010, kl 1300 , Ide´läran.

**Hjälpmedel:**

- Högst en av formelsamlingarna Beta eller Physics handbook. Observera *inga* miniräknare.

**Uppgift 1.** I ett ortonormerat koordinatsystem går ett plan  $\pi$  genom punkterna  $(1, 0, -1)$ ,  $(2, 1, 2)$  och  $(4, 1, 1)$ .

(a) Ange planets ekvation på allmän form. (8p)

*Ledning:* Glöm ej att kontrollera att de tre punkterna verkligen satisfierar din ekvation för planet.

(b) Bestäm avståndet mellan punkten  $(-1, 0, 1)$  och planet  $\pi$ . (2p)

*Ledning:* Enklast blir det nog om du använder en färdig formel. Se, vid behov, i Beta's Index under 'distance'. Välj rätt formel!

**Uppgift 2.** I ett ortonormerat koordinatsystem är punkten  $P : (2, 4, 0)$  och planet  $\pi: x + y + z - 4 = 0$  givna. Beräkna ortogonala projektionen av punkten i planet. (10p)

*Ledning:* Kanske är det enklast att välja en punkt, t ex  $(0, 4, 0)$ , i planet. Rita noggrann figur, kanske utan koordinataxlar, och gör slutligen lämplig kontroll av framräknat resultat.

**Uppgift 3.** Sambandet mellan baserna hörande till parallellkoordinatsystemen  $O_{e_1e_2}$  och  $O_{e'_1e'_2}$  ges av

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 \\ e'_2 = 2e_1 + 2e_2 \end{cases} \Leftrightarrow e' = Ae, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix}$$

Låt vidare  $x = (x_1 \ x_2)^T$  och  $x' = (x'_1 \ x'_2)^T$  beteckna koordinater i systemen  $O_{e_1e_2}$  respektive  $O_{e'_1e'_2}$ .

Ekvationen för en rät linje i  $O_{e_1e_2}$  ges av

$$2x_1 + 3x_2 = 0.$$

Vad blir linjens ekvation i  $O_{e'_1e'_2}$ ? Du skall således ange linjens ekvation uttryckt i  $x'_1$  och  $x'_2$ . (10p)

*Ledning:* Du får utnyttja sambandet  $x = A^T x'$  om Du kommer ihåg det från föreläsningarna.

**Uppgift 4.** Beräkna arean av en elliptisk skiva innesluten i en ellips, vars ekvation i ett ortonormerat system  $O_{x_1x_2}$  ges av

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 10x_2^2 = 4. \quad (10p)$$

**Uppgift 5.**

(a) Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (5p)$$

(b) Ange ett värde på parametern  $a$  nedan, så att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$$

får ett egenvärde 0 och ange även motsvarande egenvektor. Bestäm slutligen de återstående egenvärdena, men  $e_j$  tillhörande egenvektorer (5p)

**Lycka till och en God Jul !**