Lösningsförslag till tenta 2008-12-18
Linjär algebra D

Uppgift 1.

(a) Insättning av en godtycklig punkt på linjen i planets ekvation ger

$$2(1+t)-(-1+2t)+2(0+2t)+3=6+4t=0 \;\Leftrightarrow\; t=-\frac{3}{2}$$

Svar: Skärningspunkt $(-1/2,-4,-3)$

(b) Normal till planet π: $n=(2,-1,2)$
Riktningsvektor till linjen ℓ: $v=(1,2,2)$

$$n\cdot v=|n||v|\cos(\theta) \;\Leftrightarrow\; 4=3\cdot 3\cos(\theta)$$

Svar: $\cos(\theta)=\frac{4}{9}$

Uppgift 2. Kalla planet för π och normalen till planet för $n=(1,1,1)$. Låt u vara vektorn från punkten $(0,0,1)$ till $P:(2,4,1)$, dvs $u=(2,4,0)$. Rita noggrann figur! Vektorn u projiceras på normalen n varvid u' erhålles

$$u'=\frac{u\cdot n}{n\cdot n}n=\frac{6}{3}n=(2,2,2)$$

(a) Punkten Q är P:s projektion i planet och O är systemets origo. Vi får

$$\vec{OQ}=\vec{OP}-u'=(2,4,1)-(2,2,2)=(0,2,-1)$$

Kontroll: $(0,2,-1)\in\pi \Leftrightarrow\; 0+2-1-1=0$.
Svar: $(0,2,-1)$

(b) Punkten P' är P:s spegling i planet

$$\vec{OP'}=\vec{OP}-2u'=(2,4,1)-2(2,2,2)=(-2,0,-3)$$

Kontroll: Mittpunkten på sträckan PP' är $(0,2,-1)$, dvs lika med Q.
Svar: $(-2,0,-3)$

Uppgift 3.

(a) Det blir nog enklast att använda determinant

$$det(A)\neq 0 \;\Leftrightarrow\; A^{-1}\;\exists$$

Vi beräknar här determinanten med Sarrus' regel

$$det(A)=2a+4-2+2a=4a+2=0 \;\Leftrightarrow\; a=-\frac{1}{2}$$

Svar: $a\neq -\frac{1}{2}$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = 0$$

Vi får egenvärdena $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 4$ och tillhörande egenvektorer t ex $(1,1)^T$ respektive $(1,-1)^T$. Dessa är som sig bör ortogonala och vi ser att båda har längden $\sqrt{2}$.
Svar: Egenvärden $\lambda_1 = -2$ och $\lambda_2 = 4$ och egenvektorer $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ respektive $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$.

Uppgift 4. Vi försöker avbilda den elliptiska skivan på en cirkelskiva med avbildningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

där A är en konstant 2×2-matris. Rita själv en rimlig figur! Kvadratkomplettering ger

$$x_1^2 - 6x_1x_2 + 13x_2^2 = (x_1 - 3x_2)^2 + (2x_2)^2 = 1$$

och sätter vi $y_1 = x_1 - 3x_2$ och $y_2 = 2x_2$ fås $y_1^2 + y_2^2 = 1$. Vi ser också att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad det(A) = 2$$

Vi använder nu: *area av bild* $= det(A) \cdot$ *area av ursprung*
och får: $\pi = 2 \cdot$ *sökt area.*
Svar: $\frac{\pi}{2}$

Uppgift 5. Om $(A - \mu I)x = \vec{0}$ har en lösning x som ej är nollvektorn skulle skulle detta x bli egenvektor till A med egenvärde μ. Således är $A - \mu I$ inverterbar. Vi har

$$(A - \mu)x^{(j)} = (\lambda_j - \mu)x^{(j)} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Multiplicera med $B = (A - \mu I)^{-1}$, då fås efter enkel omformning

$$Bx^{(j)} = \frac{1}{\lambda_j - \mu} x^{(j)} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Sätt nu $T = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$, som är inverterbar eftersom kolonnerna är linjärt oberoende enligt förutsättning. Vi får direkt

$$BT = TD \quad \Leftrightarrow \quad T^{-1}BT = D \quad , \quad D = diag(\frac{1}{\lambda_j - \mu})$$

Svar: $T = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$ och $D = diag(\frac{1}{\lambda_j - \mu})$