Lösningsförslag till tenta 2010-12-16
Linjär algebra D

Uppgift 1. Vi tar helt enkelt en godtycklig punkt på linjen

$$(2-t, 3-t, 1+t)$$

och sätter in i planets ekvation

$$2-t-2(3-t)+1+t+1 = 2t-2 = 0.$$

För $t = 1$ fås punkten $(1, 2, 2)$.
Svar: Skärningspunkten är $(1, 2, 2)$.

Uppgift 2. Kalla planets normal för $n = (2, 1, 2)$ och låt u vara vektorn från origo - som tillhör planet - till punkten P, dvs $u = (4, 8, 1)$. Rita en lämplig figur! Låt u' vara ortogonalprojektionen av u på n

$$u' = \frac{u \cdot n}{n \cdot n} n = 2n = (4, 2, 4)$$

Ur figur fås nu lätt att

$$\vec{OQ} = u - u' = (4, 8, 1) - (4, 2, 4)$$

Svar: $\quad Q : (0, 6, -3)$

Uppgift 3. En normal till planet är $n = (8, a, -4)$. Denna skall vara parallell med

$$w = u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2ae_1 - e_2 + 2e_3$$

Parallelliteten $w = \lambda n$ på komponentform blir

$$\begin{cases} -2a = 8\lambda \\ -1 = \lambda a \\ 2 = -4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 8\lambda \\ a = 2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Svar: $a = 2$

Uppgift 4. Vi försöker avbilda den elliptiska skivan på en cirkelskiva med avbildningen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

där A är en konstant 2×2-matris. Rita själv en rimlig figur! Kvadratkomplettering ger

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 13x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + (3x_2)^2 = 9$$

och sätter vi $y_1 = x_1 + 2x_2$ och $y_2 = 3x_2$ fås $y_1^2 + y_2^2 = 9$. Vi ser också att

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad det(A) = 3$$

Vi använder nu: *area av bild = det(A) $\cdot$ area av ursprung*
och får: $\qquad 9\pi = 3 \cdot$ *sökt area.*
Svar: Arean av den elliptiska skivan är 3π

Uppgift 5.

(a) Egenvärdena kan fås ur

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \ , \ \lambda_2 = 3.$$

Egenvektorerna fås ur systemen $(A+I)x = 0$ och $(A-3I)x = 0$.
Svar: Egenvärden -1 och 3 samt egenvektorer t ex $(1 \ \ -2)^T$ resp $(1 \ \ 2)^T$.

(b) Vi skall bestämma ett värde på a så att polynomet $det(\lambda I - B)$ får ett nollställe $\lambda = 2$. Det blir nog faktiskt enklast att räkna ut polynomet

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda - a) - 13(\lambda+1) + 4(\lambda - a).$$

Nu ger $p(2) = 0$ lätt att $a = -1$ och för detta a värde blir

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^3 - 9(\lambda+1) = (\lambda+1)((\lambda+1)^2 - 9)$$

Svar: Egenvärdena är -4, -1 och 2