

Vi har pratat om linjära ekvationssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Vi har löst dem genom att gausseliminera totalmatrisen $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array} \right]$ till reducerad trappstegsform $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C} & \mathbf{d} \end{array} \right]$ och bestämt lösningsmängden genom att identifiera pivotkolumner och fria kolumner

Exempel:

Ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

löses genom att gausseliminera totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -19/3 \\ 0 & 1 & 2 & 20/3 \end{array} \right]$$

Vi ser att x_3 är fri. Med $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$ får vi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19/3 + t \\ 20/3 - 2t \\ t \end{bmatrix}$$

Genom att Gausseliminera en $m \times n$ matris $\mathbf{A}$ kan man bestämma baser för *nollrum* och *kolumnrum* till matrisen.

Nollrum till $m \times n$ matrisen $\mathbf{A}$ är mängden av alla lösningar till ekvationen

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Dvs Nollrummet $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ och } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

Exempel:

Vi bestämmer nollrummet till $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array} \right]$ genom att lösa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och får lösningen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}$, dvs en linje i $\mathbb{R}^3$ genom origo.

Kolumnrum till $m \times n$ matrisen $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n \end{array} \right]$ är mängden av alla linjärkombinationer av kolumnerna till $\mathbf{A}$

Dvs Kolumnrummet $R(\mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$

Pivotkolumnerna i $\mathbf{A}$ bildar bas för kolumnrummet $R(\mathbf{A})$

Exempel:

Vi bestämmer kolumnrummet till $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ genom att gausseliminera

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

till reducerad trappstegsform för att frilägga pivotkolumnerna. Vi ser att första och andra kolumnen i $\mathbf{A}$ är pivotkolumner. Så kolumnrummet $R(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{b} : \mathbf{b} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ och } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Rangen för en $m \times n$ matris $\mathbf{A}$ är dimensionen på kolumnrummet (antalet pivotkolumner i den reducerade matrisen).

Nollrum och kolumnrum till en matris $\mathbf{A}$ är exempel på *underrum*:

Ett *underrum* i $\mathbb{R}^n$ är en delmängd H av $\mathbb{R}^n$ som har följande egenskaper

- (i) $\mathbf{0} \in H$ (H innehåller 0-vektorn)
- (ii) $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v} \in H \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$ (H är slutet under addition)
- (iii) $\mathbf{u} \in H, c$ skalär $\Rightarrow c\mathbf{u} \in H$ (H är slutet under multiplikation med skalär)

Exempel: Mängden

$$H = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ där } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

är underrum till $\mathbb{R}^n$ eftersom

(i) $\mathbf{0} \in H$, ty låt $x_1 = 0, x_2 = 0$, vi får $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii) Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in H$

(iii) Låt $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ och c en skalär. $c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ 0 \end{bmatrix} \in H$

Rekommenderad övningar

Gör övning 5.4 igen. Denna gång, bestäm nollrum, kolumnrum och rang för matriserna i (a), (b) och (c).

Visa att Nollrumm och Kolumnrum till matrisen i exemplet ovan är underrum till $\mathbb{R}^3$ respektive $\mathbb{R}^2$