

3.6 (Lemurell) Bestäm matrisen för den linjära avbildningen i planet som ges av spegling i linjen $y = k * x$, där $k \in \mathbb{R}$.

(I lösningen nedan har jag använt $*$ för multiplikation och $\cdot$ för skalärprodukt.)

Linjen $-k * x + y = 0$ går genom origo och har normalvektor $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -k \\ 1 \end{bmatrix}$. Låt $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vara en punkt, och låt $\mathbf{P}_S$ vara speglingen av $\mathbf{P}$ i linjen. Vi har då (se lab5, eller Lemurell kap 3)

$$\mathbf{P}_S = \mathbf{P} - 2 * \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} * \mathbf{n} = \mathbf{P} - \frac{2}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} * \mathbf{n} * (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P})$$

Vi ser att

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -k \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -k \\ 1 \end{bmatrix} = k^2 + 1$$

och

$$\mathbf{n} * (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) = \begin{bmatrix} -k \\ 1 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} -k \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -k \\ 1 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} -k & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) =$$

$$\left(\begin{bmatrix} -k \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -k & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dvs

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_S &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{2}{k^2 + 1} * \begin{bmatrix} k^2 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \frac{2}{k^2 + 1} * \begin{bmatrix} k^2 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{k^2 + 1} * \begin{bmatrix} k^2 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{k^2 + 1} * \begin{bmatrix} -k^2 + 1 & 2 * k \\ 2 * k & k^2 - 1 \end{bmatrix} \right) * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrisen för den linjära avbildningen blir alltså

$$\frac{1}{k^2 + 1} * \begin{bmatrix} -k^2 + 1 & 2 * k \\ 2 * k & k^2 - 1 \end{bmatrix}$$