

5.2 Om man bestämmer skärningslinjen mellan de två planen genom att lösa det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

med Gausseliminering av totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

till reducerad trappstegsform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6/5 & 9/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & 8/5 \end{array} \right]$$

får man ($z = t$) skärningslinjen

$$\begin{cases} x = 9/5 - 6/5t \\ y = 8/5 - 2/5t \\ z = t \end{cases}$$

I facit ger man skärningslinjen

$$\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$$

vilket är samma linje.

Man kan kontrollera att man räknat rätt genom att multiplicera in sin lösning i det ursprungliga ekvationssystemet. Vi har

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

som kan skrivas på matrisform $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ med

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Med $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9/5 \\ 8/5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{bmatrix} t$ får vi

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 9/5 \\ 8/5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{bmatrix} t \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9/5 \\ 8/5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

På samma sätt får vi för lösningen i facit $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right) = \dots = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$