

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 1097
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Plats och tid: M, 14:00-18:00

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.

Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamens-tillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G S F Ö R S L A G

1 Denna uppgift omfattar 14 poäng och finns på separat blad på vilket lösningar och svar ska skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

2 Låt a, b vara konstanter och betrakta linjen $ax + by = 0$ genom origo. Man kan visa att den ortogonala projektionen $\mathbf{x}_L$ av en punkt på linjen är en linjär avbildning med $\mathbf{P}$ som standardmatris. Det gäller att

$$\mathbf{x}_L = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T\right) \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}$$

där $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ är normalvektor till linjen och $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är identitetsmatrisen och $\mathbf{x}$ är en punkt.

(a) Låt linjen vara

$$x + 3y = 0$$

(i) Bestäm matrisen $\mathbf{P}$ i den linjära avbildningen ovan. (3p)

(ii) Bestäm projektionen av $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. (2p)

(iii) Visa att $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5/3 \end{bmatrix}$ är en egenvektor till $\mathbf{P}$. (2p)

(b) Låt $\mathbf{v}$ vara en punkt på linjen $ax + by = 0$. Visa att isåfall är $\mathbf{v}$ en egenvektor till $\mathbf{P}$ (standardmatrisen för den ortogonala projektionen). Bestäm även tillhörande egenvärde. (4p)

(c) Bestäm en egenvektor till $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}$ enligt (b) ovan) med egenvärdet 0. Motivera ditt svar. (3p)

(a) (i) Med $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ får vi $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 10$ och $\mathbf{n} \mathbf{n}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$
 $\mathbf{P} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T\right) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 9/10 & -3/10 \\ -3/10 & 1/10 \end{bmatrix}$

$$(ii) \mathbf{x}_L = \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9/10 & -3/10 \\ -3/10 & 1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 \\ -1/10 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9/10 & -3/10 \\ -3/10 & 1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 5 \\ -5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5/3 \end{bmatrix}$$

(b) Eftersom $\mathbf{v}$ på linjen har vi $\mathbf{n}^T \mathbf{v} = 0$, vi får

$$\mathbf{P}\mathbf{v} = (\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T) \mathbf{v} = (\mathbf{I} \mathbf{v} - \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T \mathbf{v}) = \mathbf{I} \mathbf{v} = \mathbf{v}, \text{ egenvärdet } 1.$$

(c) Alla vektorer parallella med normalvektorn till linjen är egenvektorer med egenvärdet 0 ty $\mathbf{P}\mathbf{n} = (\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} \mathbf{n}^T) \mathbf{n} = \mathbf{n} - \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{n} (\mathbf{n}^T \mathbf{n}) = \mathbf{0} = 0\mathbf{n}.$

3 Låt $P = (0, -1, 0)$, $Q = (0, 2, -3)$ och $R = (3, -3, 3)$

(a) Bestäm ekvationen på normalform för planet π som innehåller punkterna P , Q och R . (3p)

(b) Bestäm speglingen av punkten $(0, 1, 0)$ genom planet. (2p)

$$(a) \overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 3, -3), \overrightarrow{PR} = R - P = (3, -2, 3), \mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -9 \end{bmatrix},$$

$$\text{dvs } \pi : 3x - 9y - 9z = d. P \in \pi \Rightarrow d = 3 * 0 - 9 * (-1) - 9 * 0 = 9.$$

$$\text{Vi får } \pi : 3x - 9y - 9z = 9 \Leftrightarrow x - 3y - 3z = 3.$$

(b) Speglingen $\mathbf{x}_r = \mathbf{x} + 2\alpha \mathbf{n}$ där $\alpha = \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}$.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3, \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = 19 \text{ och}$$

$$\alpha = \frac{3 - (-3)}{19} = \frac{6}{19}. \text{ Vi får } \mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 * \frac{6}{19} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/19 \\ -17/19 \\ -36/19 \end{bmatrix}$$

4 Låt $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vara två avbildningar.

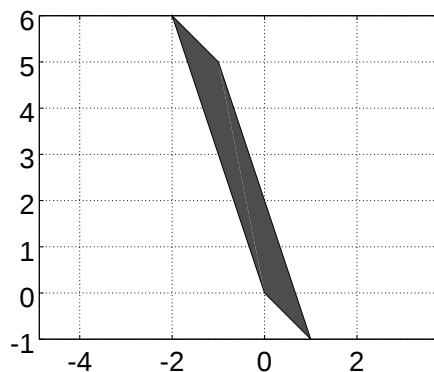
(a) Avgör vilka av avbildningarna ovan som är linjära. Motivera ditt svar. (4p)

(b) Man har använt avbildningen $\mathbf{T}$ ovan för att beräkna bilden av en rektangel med höjden 2 och bredden 1, och med nedre vänstra hörnet i origo. Rita bilden och beräkna dess area. (4p)

(a) Låt $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{S}$ är inte linjär ty

$$\mathbf{S}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + 1 \\ (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \end{bmatrix} \neq \mathbf{S}(\mathbf{a}) + \mathbf{S}(\mathbf{b}). \mathbf{T} \text{ däremot är linjär ty matris-vektor produkt uppfyller linjäritetsvillkoren.}$$

(b)



Arean är $2 * \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2 * 2 = 4$

5 En $n \times n$ matris $\mathbf{A}$ är positivt definit om $\mathbf{A}$ är symmetrisk och om $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ för alla $n \times 1$ vektorer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

(a) Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Visa att $\mathbf{A}$ är positivt definit. (4p)

(b) Låt $\mathbf{A}$ enligt (a) ovan. Vilka lösningar har systemet $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$? (1p)

(c) Visa att varje positivt definit matris är inverterbar. (4p)

(a) $\mathbf{A}$ är symmetrisk, ty $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$. Låt $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 5x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 > 0$ då $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

(b) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{array} \right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$ dvs bara den triviala lösningen $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) Om $\mathbf{A}$ är singular finns ett $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ s.a. $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}$ och då är även $\mathbf{x}^T * \mathbf{A} * \mathbf{x} = 0$ vilket strider mot att $\mathbf{A}$ är positivt definit.

- 1 (a) Vilka av följande uppsättningar av vektorer är *inte* en bas för $\mathbb{R}^3$? Motivera (2p)
kort dina svar.

- (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
(vi) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
(v) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Lösning:

(i) är inte en bas eftersom en av vektorerna inte ligger i $\mathbb{R}^3$ (ii) ej bas ty första och andra vektorn är parallella. (iii) har för få vektorer, (iv) har för många vektorer (dvs vektorerna är inte linjärt oberoende), (v) är inte en bas eftersom vektorerna är linjärt beroende.

- (b) Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Bestäm en matris $\mathbf{B}$ sådan att (3p)
 $\mathbf{A} * \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} * \mathbf{A} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Lösning:

$$\text{Tex } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (c) Man har använt Matlab för att beräkna en lösning till ett linjärt ekvationssystem $\mathbf{A} * \mathbf{x} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{A}$ är en (3×3) matris och $\mathbf{b}$ är en (3×1) kolumnvektor och fått följande svar: (3p)

```
>> rref([A b])
ans
    1.0000         0   -0.5000   -0.5000
         0    1.0000   -1.0000   -1.0000
         0         0         0         0
```

Bestäm samtliga lösningar. (Matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{b}$ har definierats före kodsekvensen ovan)

Lösning:

x_3 fri, låt $x_3 = t$. Vi får då $x_2 = -1 + t$ och $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$ dvs

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- (d) Bestäm koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ relativt basen (3p)

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Lösning: Bestäm x_1, x_2, x_3 sådana att

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Radreducering

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9/4 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array} \right]$$

$$\text{dvs } \mathbf{v}_F = \begin{bmatrix} -9/4 \\ 7/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

(e) Beräkna volymen av den parallelepiped som spänns upp av vektorerna (3p)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösning:

$$|\det([\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3])| = |\det(\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix})| = 2$$