

Tentamen Linjär algebra D (TMV216), Linjär algebra GU (MMGD20)

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 1097
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Plats och tid: SB, 14:00-18:00

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser TMV216: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.

Betygsgränser MMGD20: 20-34 p. ger betyget G, 35 p. eller mer ger betyget VG. Maxpoäng är 50.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamens-
tillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

1 Denna uppgift omfattar 14 poäng och finns på separat blad på vilket lösningar och svar ska skrivas. **Lösgör bladet och lämna in det som blad 1 tillsammans med övriga lösningar.**

2 Låt en linje ges av

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

(a) Bestäm en ekvation på normalform för det plan som är vinkelrätt mot linjen (3p)
och som innehåller punkten $(2, -3, 4)$

(b) Ange ekvationen för någon linje som ligger i planet du bestämde i (a). (3p)

(a) $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ är riktningsvektor för linjen och därmed en normalvektor till det sökta planet, som alltså har ekvationen $5(x - 2) + 2(y + 3) - 3(z - 4) = 0$, dvs $5x + 2y - 3z + 8 = 0$

(b) Tex $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ är parallell med planet ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$), så till exempel linjen

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 + 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

ligger i planet.

3 Låt O, A och B vara tre punkter.

(a) Låt $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ vara vektorn som startar i O och slutar i A och låt $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ vara vektorn som startar i O och slutar i B . Rita en figur och förklara varför $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (3p)

(b) Visa att $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (3p)

(c) Om M är mittpunkten på sträckan $\overrightarrow{AB}$ så gäller (4p)

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

Visa det.

(a) Se läroboken sidan 10

(b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = (\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

(c) Eftersom $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ gäller

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

4 Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestäm inversen till $\mathbf{A}$. (3p)

(b) Om man har större matriser kan man partitionera dem i delmatriser. Matrisen ovan kan tex. skrivas (3p)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

där $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna $\mathbf{A}^2$, svara i delmatriserna $\mathbf{I}$, $\mathbf{0}$ och $\mathbf{E}$

(c) Låt (2p)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

där $\mathbf{I}$ är $n \times n$ identitetsmatriser, $\mathbf{0}$ $n \times n$ noll-matris och $\mathbf{B}$ en $n \times n$ -matris. Visa att $\mathbf{M}$ är inverterbar.

(d) Rotation och skalning är linjära avbildningar och kan beskrivas med standardmatriser $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Däremot är translation inte linjär utan en affin avbildning. En affin avbildning $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ kan beskrivas med matrismultiplikation. Visa hur. (3p)

(a)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\text{dvs } \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} + \mathbf{E} & \mathbf{E}^2 \end{bmatrix}$$

(c) $\det(\mathbf{M}) = 1 \neq 0$ (produkt av diagonalelementen), så $\mathbf{M}$ är inverterbar.

(d) Inför en extra koordinat och bilda

$$\mathbf{F}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

där $\mathbf{0}^T$ är en rad med nollor.

5 (a) Definera egenvärde och egenvektor för kvadratiska matriser. (2p)

(b) Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. Bestäm egenvärden och egenvektorer till produkterna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$. (3p)

(c) Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara två inverterbara 2×2 matriser. Visa att $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ har samma egenvärden. (4p)

(a) Se läroboken sidan 231

(b) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Egenvärden för $\mathbf{AB}$ ges av lösningarna till den karakteristiska ekvationen

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3-\lambda)(-\lambda) + 2 = 0. \text{ Dvs } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

Egenvektor som hör ihop med $\lambda_1 = 1$:

$$(\mathbf{AB} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} = (\mathbf{AB} - \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi får

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenvektor som hör ihop med $\lambda_2 = 2$:

$$(\mathbf{AB} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} = (\mathbf{AB} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi får

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Analogt resonemang för $\mathbf{BA}$ ger egenvärden $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ med tillhörande egenvektorer $t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $t \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ (Alternativt utnyttja (c)-uppgiften)

- (c) Om λ är ett egenvärde till $\mathbf{AB}$ finns en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ sådan att $\mathbf{ABv} = \lambda \mathbf{v}$.
Om $\lambda \neq 0$ är $\mathbf{Bv} \neq \mathbf{0}$ och $(\mathbf{BA})(\mathbf{Bv}) = \mathbf{B}(\mathbf{ABv}) = \mathbf{B}(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{Bv}$ och alltså är $\mathbf{Bv}$ en egenvektor till $\mathbf{BA}$ med egenvärdet λ .
-

- 1 (a) Låt $\mathbf{A}$ vara en $n \times n$ matris. Vilket av följande påståenden är inte ekvivalent (2p)
med de övriga.

- (i) Matrisen $\mathbf{A}$ har n oberoende kolumnvektorer.
- (ii) Matrisen $\mathbf{A}$ är inverterbar.
- (iii) Matrisen $\mathbf{A}$ har en nollskild determinant.
- (iv) Ekvationen $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-triviala lösningar.

Lösning: (iv) är inte ekvivalent med de övriga.

- (b) Bestäm två matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ sådana att $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är inverterbara, men $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (3p)
är inte inverterbar. Motivera ditt svar.

Lösning:

Tex $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$. Både $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är då inverterbara, men
summan $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$ är inte inverterbar.

- (c) Man har använt Matlab för att beräkna alla lösningar till det homogena ekva- (3p)
tionssystemet $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ enligt följande:

```
>> A = [0, 1, -1; 1, 1, 0; 2, 1, 1];  
>> b = [0; 0; 0];  
>> x = A\b;  
>> x  
x =  
    0  
    0  
    0
```

Har man bestämt samtliga lösningar? (Om så, motivera varför, om inte bestäm
alla lösningar).

Lösning: Nej man har inte bestämt samtliga lösningar. Radreducering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

dvs x_3 fri, låt $x_3 = t$. Vi får då $x_2 = t$ och $x_1 = -t$, dvs

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

Eftersom t kan väljas godtyckligt får man triviallösningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ genom att
välja $t = 0$.

- (d) Bestäm koordinaterna i standardbasen för den vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ som i basen (3p)

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \text{ har koordinatvektorn } \mathbf{v}_F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösning:

$$\mathbf{v} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (e) Låt (3p)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & p \end{bmatrix}$$

där p är ett reellt tal. Bestäm p sådan att $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Lösning:

Utveckling längs första raden, $\det(\mathbf{A}) = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -p+1$, $\det(\mathbf{A}) = 0$ då $p \neq 1$. Svar: $p \neq 1$